

А.М. Коструба, В.І. Саварин, О.М. Вихрист,
Б.М. Яцик, Н.Б. Ладзоришин

Вища математика

Навчальний посібник
для здобувачів вищої освіти
першого (бакалаврського) рівня
спеціальності
162 Біотехнології та біоінженерія

Львів – 2024

Рецензент: доктор технічних наук, професор., завідувач кафедри загальнотехнічних дисциплін Львівського національного університету ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Гжицького Ціж Б.Р.

Вища математика: Навчальний посібник. Укладачі А.М. Коструба, В.І. Саварин, О.М. Вихрист, Б.М. Яцик, Н.Б. Ладзоришин. – Львів, 2024. – 82 с.

Посібник розрахований для здобувачів вищої освіти першого (бакалаврського) рівня спеціальності 162 Біотехнології та біоінженерія факультету харчових технологій при роботі на практичних заняттях освітньої компоненти Вища математика.

Рекомендовано до друку навчально-методичною радою факультету харчових технологій та біотехнології Львівського національного університету ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Гжицького

Протокол №9 від 19.11.2024 р.

ПЕРЕДМОВА

Для засвоєння курсу вищої математики важливим фактором є самостійна робота студентів, яка включає розв'язок практичних завдань.

Метою запропонованих завдань є:

- закріпити теоретичні знання;
- навчитись розв'язувати основні види завдань;
- забезпечити належну підготовку здобувачів вищої освіти до виконання самостійних робіт та здачі екзамену;
- навчити здобувачів освіти застосовувати знання з вищої математики до розв'язку задач пов'язаних з технологічними процесами та обробкою даних.

Зміст

1.	Передмова	3
2.	Матриці. Визначники	5
3.	Системи лінійних алгебраїчних рівнянь	12
4.	Вектори	19
5.	Пряма на площині	25
6.	Пряма і площина у просторі	31
7.	Границі функцій	37
8.	Похідні функцій	43
9.	Похідна неявно заданої функції	45
10.	Дослідження функцій за допомогою похідних	47
11.	Функції багатьох змінних	53
12.	Невизначені інтеграли	54
13.	Визначені інтеграли	61
14.	Застосування визначених інтегралів	64
15.	Кратні інтеграли	69
16.	Диференціальні рівняння першого порядку	73

МАТРИЦІ. ВИЗНАЧНИКИ

Завдання І. Виконати дії з матрицями.

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 5 & -7 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & -7 \\ 5 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -13 & -4 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4. -2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 5 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -14 \\ -10 & 6 & -8 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$5. \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ -3 & -6 & 0 \\ 15 & -18 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 0 \\ 5 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

Завдання ІІ. Обчислити $3A - 2B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 12 \\ 15 & 18 & 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 \\ 17 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Завдання III. Помножити матриці

$$1. \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 9 \\ 21 & 13 \end{pmatrix}$$

Перед тим як множити матриці потрібно перевірити розмірності матриць. Адже множити матриці можна лише у тому випадку, коли кількість стовпців першої матриці співпадає з кількістю рядків другої матриці.

У даному випадку розмірність першої матриці – 2×2 , розмірність другої матриці – 2×2 . Кількість стовпців першої матриці – 2, кількість рядків другої матриці – теж 2. Отже, ми можемо множити дані дві матриці.

Множимо почергово рядки з першої матриці на стовпці другої матриці:

$$1p \times 1st: 2 \cdot 3 + 1 \cdot 6 = 6 + 6 = 12;$$

$$1p \times 2st: 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-1) = 10 - 1 = 9;$$

$$2p \times 1st: 3 \cdot 3 + 2 \cdot 6 = 9 + 12 = 21;$$

$$2p \times 2st: 3 \cdot 5 + 2 \cdot (-1) = 15 - 2 = 13.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб перемножити матрицю A на матрицю B розглянемо розмірності даних матриць.

Розмірність матриці A : 2×3

Розмірність матриці B : 3×1

Кількість стовпців першої матриці (A) і кількість рядків другої матриці (B) співпадають, тому ми можемо проводити множення $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Множимо по черговому рядки з першої матриці на стовпці другої матриці:

$$1p \times 1ст: 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 6 + 1 + 6 = 13;$$

$$2p \times 1ст: 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3 - 2 + 2 = 3.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Для того, щоб перемножити матрицю B на матрицю A розглянемо розмірності даних матриць.

Розмірність матриці B : 3×1

Розмірність матриці A : 2×3

Кількість стовпців першої матриці (B) і кількість рядків другої матриці (A) не співпадають, тому ми не можемо проводити множення $B \cdot A$.

$$4. \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 10 & -15 \\ 13 & 11 & 8 \\ -12 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

У даному випадку розмірність першої матриці – 3×3 , розмірність другої матриці – 3×3 . Кількість стовпців першої матриці і кількість рядків другої матриці співпадають, тому ми можемо проводити множення.

Множимо по черговому рядки з першої матриці на стовпці другої матриці:

$$1p \times 1ст: 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 2 = 13;$$

$$1p \times 2ст: 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 = 10;$$

$$1p \times 3ст: 3 \cdot (-3) + 4 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 = -15;$$

$$2p \times 1ст: -2 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + 3 \cdot 2 = 13;$$

$$2p \times 2ст: -2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 11;$$

$$2p \times 3ст: -2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 = 8;$$

$$3p \times 1ст: 1 \cdot (-1) + (-3) \cdot 5 + 2 \cdot 2 = -12;$$

$$3p \times 2ст: 1 \cdot 2 + (-3) \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 1;$$

$$3p \times 3ст: 1 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 2.$$

Завдання IV. Знайти матрицю, транспоновану до заданої.

$$1. C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$2. K = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \quad K^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Завдання V. Обчислити визначник другого порядку.

Визначник заданої довільної матриці C можна позначати одним із наступних рівноцінних між собою варіантів: $\det C = |C| = \Delta C$

$$1. C = \begin{pmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det C = \begin{vmatrix} 10 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 \cdot 1 - (-2) \cdot 3 = 10 + 6 = 16.$$

$$2. C = \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta C &= \begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix} = \sin \alpha \cdot \sin \alpha - (-\cos \alpha) \cdot \cos \alpha \\ &= (\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1 \end{aligned}$$

Завдання VI. Обчислити визначник третього порядку

двома способами:

1) за правилом трикутника;

2) за правилом Сарріуса

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$1) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 5 & 7 \\ 8 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 8 + 4 \cdot (-3) \cdot 2 -$$

$$- 8 \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot 7 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot (-3) = \\ = 15 + 112 - 24 - 160 - 14 + 18 = -53.$$

$$2) \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ -3 & 5 & 7 & -3 & 5 \\ 8 & 2 & 3 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 8 +$$

$$+ 4 \cdot (-3) \cdot 2 - 8 \cdot 5 \cdot 4 - 2 \cdot 7 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) \cdot 2 = \\ = 15 + 112 - 24 - 160 - 14 + 18 = -53.$$

Завдання VII. Знайти обернену матрицю до заданої

матриці $K = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Обернена матриця до заданої знаходиться за формулою:

$$K^{-1} = \frac{1}{\det K} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$\det K$ – визначник даної матриці K .

$$\det K = \Delta K = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ -5 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4 \cdot (-5) + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 7 \cdot 3 \cdot (-5) - 2 \cdot 4 \cdot 2 - (-3 \cdot 5 \cdot 6) = 18 - 100 + 84 + 105 - 16 - 90 = 1.$$

A_{ij} – алгебраїчні доповнення даної матриці K .

$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, M_{ij} – мінор елемента a_{ij} , який отримується шляхом викреслення рядка i та стовпця j .

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^2 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot 4) = \\ &= 1 \cdot (9 - 8) = 1 \cdot 1 = 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (6 \cdot 3 - 4 \cdot (-5)) = \\ &= -1 \cdot (18 + 20) = -38; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (6 \cdot 2 - 3 \cdot (-5)) = \\ &= 1 \cdot (12 + 15) = 27; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (5 \cdot 3 - 2 \cdot 7) = \\ &= -1 \cdot (15 - 14) = -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (2 \cdot 3 - 7 \cdot (-5)) = \\ &= 1 \cdot (6 + 35) = 41; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (2 \cdot 2 - 5 \cdot (-5)) = \\ &= -1 \cdot (4 + 25) = -29; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 7) = \\ &= 1 \cdot (20 - 21) = -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (2 \cdot 4 - 6 \cdot 7) = \\ &= -1 \cdot (8 - 42) = 34; \end{aligned}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^6 \cdot (2 \cdot 3 - 6 \cdot 5) = \\ = 1 \cdot (6 - 30) = -24;$$

Отримані значення підставляємо у формулу для обчислення K^{-1} :

$$K^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -38 & 41 & 34 \\ 27 & -29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -38 & 41 & 34 \\ 27 & -29 & -24 \end{pmatrix}$$

СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

Завдання. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

- 1) методом Крамера;
- 2) методом Гауса;
- 3) методом оберненої матриці (матричний метод).

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = -2 \\ 3x + 3y + z = 9 \\ 4x - 2y + 3z = 11 \end{cases}$$

1. Метод Крамера

Невідомі x, y, z за даним методом знаходяться за формулами:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta}$$

Δ – визначник, що складається з коефіцієнтів, які стоять біля невідомих x, y, z .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 4 +$$

$$+ (-3) \cdot 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \cdot 2 -$$
$$- 3 \cdot 5 \cdot 3 = 18 + 20 + 18 + 36 + 4 - 45 = 51$$

Δx – визначник, що отримується з визначника Δ способом заміни коефіцієнтів, які стоять біля невідомих x , вільними членами системи (числами, що стоять після «=», у даному випадку числами $(-2); 9; 11$).

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 9 & 3 & 1 \\ 11 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 11 +$$

$$+ (-3) \cdot 9 \cdot (-2) - 11 \cdot 3 \cdot (-3) - (-2) \cdot 1 \cdot (-2) -$$

$$-3 \cdot 5 \cdot 9 = -18 + 55 + 54 + 99 - 4 - 135 = 51.$$

Δy – визначник, що отримується з визначника Δ способом заміни коефіцієнтів, які стоять біля невідомих y , вільними членами системи (числами, що стоять після «=», у даному випадку числами $(-2); 9; 11$).

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 3 & 9 & 1 \\ 4 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 \cdot 4 +$$

$$+ (-3) \cdot 3 \cdot 11 - 4 \cdot 9 \cdot (-3) - 11 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot (-2) \cdot 3 =$$

$$= 54 - 8 - 99 + 108 - 22 + 18 = 51.$$

Δz – визначник, що отримується з визначника Δ способом заміни коефіцієнтів, які стоять біля невідомих z , вільними членами системи (числами, що стоять після «=», у даному випадку числами $(-2); 9; 11$).

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & 3 & 9 \\ 4 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 11 + 5 \cdot 9 \cdot 4 +$$

$$+ (-2) \cdot 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 3 \cdot (-2) - (-2) \cdot 9 \cdot 2 - 11 \cdot 5 \cdot 3 =$$

$$= 66 + 180 + 12 + 24 + 36 - 165 = 153.$$

Знайдені величини $\Delta, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ підставляємо у формули для обчислення невідомих x, y, z .

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{51}{51} = 1; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{51}{51} = 1; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{153}{51} = 3.$$

Відповідь: $x = 1$; $y = 1$; $z = 3$.

Для перевірки правильності знайденого розв'язку потрібно підставити знайдені величини $x = 1$; $y = 1$; $z = 3$ у систему рівнянь (у будь яке рівняння):

$$4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 4 - 2 + 9 = 11$$

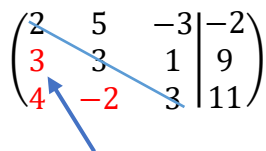
2. Метод Гауса

Потрібно обчислити Δ і перевірити відмінність його від 0. У нашому випадку $\Delta = 51 \neq 0$.

Запишемо розширену матрицю даної системи рівнянь:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

З даною матрицею потрібно проводити перетворення для того, щоб на місці елементів a_{21}, a_{31}, a_{32} (нижче від головної діагоналі) отримати «0».



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & 9 \\ 4 & -2 & 3 & 11 \end{array} \right)$$

Почнемо з елемента a_{21} . Для цього потрібно I рядок помножити на (-3) і додати II рядок помножений на 2:

I стовпець: $2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -6 + 6 = 0$;

II стовпець: $5 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = -15 + 6 = -9$;

III стовпець: $-3 \cdot (-3) + 1 \cdot 2 = 9 + 2 = 11$;

IV стовпець: $-2 \cdot (-3) + 9 \cdot 2 = 6 + 18 = 24$.

Результат запишемо на місці II рядка. I рядок і III рядок залишаємо без зміни.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -2 \\ \color{red}{0} & -9 & 11 & 24 \\ 4 & -2 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

Переходимо до елемента a_{31} . Потрібно I рядок помножити на (-2) і додати III рядок:

$$\text{I стовпець: } 2 \cdot (-2) + 4 = -4 + 4 = 0;$$

$$\text{II стовпець: } 5 \cdot (-2) - 2 = -10 - 2 = -12;$$

$$\text{III стовпець: } -3 \cdot (-2) + 3 = 6 + 3 = 9;$$

$$\text{IV стовпець: } -2 \cdot (-2) + 11 = 4 + 11 = 15.$$

Результат запишемо на місці III рядка. I рядок і раніше перетворений II рядок залишаємо без зміни.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -3 & -2 \\ \color{red}{0} & -9 & 11 & 24 \\ \color{red}{0} & -12 & 9 & 15 \end{array}\right)$$

Залишилось на місці елемента a_{32} отримати «0». Для цього тепер потрібно II рядок помножити на (-4) і додати III рядок помножений на 3:

$$\text{I стовпець: } 0 \cdot (-4) + 0 \cdot 3 = 0;$$

$$\text{II стовпець: } -9 \cdot (-4) + (-12) \cdot 3 = 36 - 36 = 0;$$

$$\text{III стовпець: } 11 \cdot (-4) + 9 \cdot 3 = -44 + 27 = -17;$$

$$\text{IV стовпець: } 24 \cdot (-4) + 15 \cdot 3 = -96 + 45 = -51.$$

Результат запишемо на місці III рядка. I рядок і раніше перетворений II рядок залишаємо без зміни.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \cancel{2} & 5 & -3 & -2 \\ \color{red}{0} & -9 & 11 & 24 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & -17 & -51 \end{array}\right)$$

Після проведених перетворень отримано потрібні значення «0» на місці елементів a_{21}, a_{31}, a_{32} (нижче від головної діагоналі).

Тепер потрібно дану отриману розширену матрицю записати у вигляді системи рівнянь. Для цього I стовпчик потрібно помножити на x , II стовпчик – на y , III стовпчик – на z .

$$\begin{cases} 2 \cdot x + 5 \cdot y - 3 \cdot z = -2 \\ 0 \cdot x - 9 \cdot y + 11 \cdot z = 24 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y - 17 \cdot z = -51 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y - 3z = -2 \\ -9y + 11z = 24 \\ -17z = -51 \end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему рівнянь, починаючи з останнього рівняння.

$$-17z = -51;$$

$$z = \frac{-51}{-17};$$

$$z = 3.$$

$$-9y + 11z = 24;$$

$$-9y + 11 \cdot 3 = 24;$$

$$-9y = 24 - 33;$$

$$-9y = -9;$$

$$y = \frac{-9}{-9};$$

$$y = 1.$$

$$2x + 5y - 3z = -2;$$

$$2x + 5 \cdot 1 - 3 \cdot 3 = -2;$$

$$2x + 5 - 9 = -2;$$

$$2x = -2 - 5 + 9;$$

$$2x = 2;$$

$$x = \frac{2}{2};$$

$$x = 1.$$

Відповідь: $x = 1$; $y = 1$; $z = 3$.

3. Метод оберненої матриці (матричний метод).

Запишемо дану систему рівнянь у матричній формі:

$$C \cdot X = B.$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Розв'язки знаходяться за формулою $X = C^{-1} \cdot B$.

Потрібно знайти обернену матрицю C^{-1} :

$$C^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Визначник було обчислено раніше: $\Delta = 51$.

Потрібно обчислити алгебраїчні доповнення.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 2 = 11;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -(9 - 4) = -5;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 - 12 = -18;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -(15 - 6) = -9;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 12 = 18;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-4 - 20) = 24;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 9 = 14;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2 + 9) = -11;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 15 = -9.$$

Отримані значення підставляємо у формулу для обчислення C^{-1} :

$$C^{-1} = \frac{1}{51} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -9 & 14 \\ -5 & 18 & -11 \\ -18 & 24 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{51} \cdot \begin{pmatrix} 11 & -9 & 14 \\ -5 & 18 & -11 \\ -18 & 24 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{51} \cdot \begin{pmatrix} 51 \\ 51 \\ 153 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Множимо почергово рядки з першої матриці на стовпці другої матриці:

$$1\text{p} \times 1\text{ст: } 11 \cdot (-2) - 9 \cdot 9 + 14 \cdot 11 = 51;$$

$$2\text{p} \times 1\text{ст: } -5 \cdot (-2) + 18 \cdot 9 - 11 \cdot 11 = 51;$$

$$3\text{p} \times 1\text{ст: } -18 \cdot (-2) + 24 \cdot 9 - 9 \cdot 11 = 153.$$

Відповідь: $x = 1$; $y = 1$; $z = 3$.

ВЕКТОРИ

Завдання I. Задано два вектори: $\vec{a} = -3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$;
 $\vec{b} = -2\vec{i} + 4\vec{k}$.

1. Знайти координати вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

Вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ мають координати: $\vec{a} = (-3; -3; 6)$;
 $\vec{b} = (-2; 0; 4)$.

Знайдемо координати векторів $2\vec{a}$ та $3\vec{b}$. Для цього потрібно перемножити коефіцієнт на кожну координату вектора.

$$2\vec{a} = (2 \cdot (-3); 2 \cdot (-3); 2 \cdot 6) = (-6; -6; 12);$$

$$3\vec{b} = (3 \cdot (-2); 3 \cdot 0; 3 \cdot 4) = (-6; 0; 12).$$

Тепер знайдемо $2\vec{a} + 3\vec{b}$. Для цього потрібно додати відповідні координати двох векторів.

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = (-6 + (-6); -6 + 0; 12 + 12) = (-12; -6; 24).$$

Відповідь: $2\vec{a} + 3\vec{b} = (-12; -6; 24)$.

2. Знайти скалярний добуток векторів $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ та $\vec{b}$.

Щоб обчислити скалярний добуток потрібно перемножити відповідні координати векторів і додати між собою ці добутки. І результатом скалярного добутку завжди є число.

$$\begin{aligned}(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{b} &= -12 \cdot (-2) + (-6) \cdot 0 + 24 \cdot 4 = \\ &= 24 + 0 + 96 = 120.\end{aligned}$$

3. Знайти проекцію вектора $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ на вектор $\vec{b}$.

Проекція вектора $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ на вектор $\vec{b}$ обчислюється за формулою:

$$\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = \frac{(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

В чисельнику даної формули потрібно обчислити скалярний добуток двох векторів. В даному випадку його було обчислено в попередньому завданні:

$$(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot \vec{b} = 120$$

У знаменнику – довжина вектора $\vec{b}$ (модуль вектора $\vec{b}$).

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

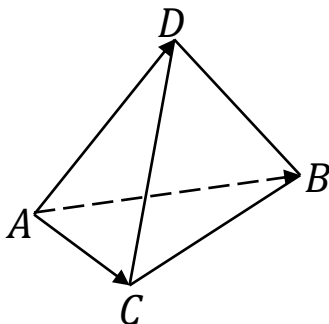
Підставимо чисельник і знаменник у формулу:

$$\text{пр}_{\vec{b}}(2\vec{a} + 3\vec{b}) = \frac{120}{2\sqrt{5}} = \frac{60}{\sqrt{5}} = \frac{60 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{60\sqrt{5}}{5} = 12\sqrt{5}$$

Завдання II. Дано трикутну піраміду $ABCD$ з координатами вершин:

$A(1; -2; 3); B(4; 7; 2);$

$C(6; 4; 2); D(4; 8; 6)$



1. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1; 7 - (-2); 2 - 3) = (3; 9; -1);$$

$$\overrightarrow{AC} = (6 - 1; 4 - (-2); 2 - 3) = (5; 6; -1);$$

$$\overrightarrow{AD} = (4 - 1; 8 - (-2); 6 - 3) = (3; 10; 3).$$

2. Знайти довжини векторів $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 9^2 + (-1)^2} = \sqrt{9 + 81 + 1} = \sqrt{91};$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{3^2 + 10^2 + 3^2} = \sqrt{9 + 100 + 9} = \sqrt{118}$$

3. Знайти косинус кута між векторами $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AD}$.

Для знаходження косинуса кута між векторами використаємо формулу скалярного добутку цих векторів:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD})$$

З даної формули визначимо косинус:

$$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$$

Довжини векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$ обчислено вище. Тому потрібно обчислити ще скалярний добуток даних векторів (координати векторів знайдено вище).

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 3 \cdot 3 + 9 \cdot 10 + (-1) \cdot 3 = 9 + 90 - 3 = 96$$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 96 > 0$ – це означає, що кут між цими векторами $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AD}$ гострий.

Підставимо скалярний добуток векторів та їхні довжини у формулу для обчислення косинуса кута.

$$\cos(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) = \frac{96}{\sqrt{91} \cdot \sqrt{118}} = \frac{96}{\sqrt{10738}}$$

4. Знайти векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$.

Раніше знайшовши координати векторів, обчислимо векторний добуток даних векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 9 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

Даний визначник обчислимо двома способами:

1) методом трикутника;

2) за допомогою алгебраїчних доповнень (A_{ij}).

$$\begin{aligned} 1) \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 9 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 9 \cdot (-1) + \vec{j} \cdot (-1) \cdot 5 + \\ &+ \vec{k} \cdot 6 \cdot 3 - 5 \cdot 9 \cdot \vec{k} - 6 \cdot (-1) \cdot \vec{i} - (-1) \cdot \vec{j} \cdot 3 = \\ &= -9\vec{i} - 5\vec{j} + 18\vec{k} - 45\vec{k} + 6\vec{i} + 3\vec{j} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 27\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 9 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 9 & -1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} + \\ &+ \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - 27\vec{k} \end{aligned}$$

Результатом векторного добутку завжди є вектор (координати вектора).

В даному випадку, обчисливши векторний добуток, отримали вектор з координатами $(-3; -2; -27)$.

5. Знайти площу грані ABC .

Оскільки грань ABC – трикутник, то застосуємо формулу для обчислення площі трикутника:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|.$$

Вище було обчислено векторний добуток $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Зараз потрібно обчислити модуль цього векторного добутку (тобто довжину отриманого вектора $(-3; -2; -27)$).

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + (-27)^2} = \\ &= \sqrt{9 + 4 + 729} = \sqrt{742} \end{aligned}$$

Обчислений модуль векторного добутку підставимо у формулу для обчислення площі трикутника.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{742} = \frac{\sqrt{742}}{2} \quad (\text{квадратних одиниць})$$

6. Знайти об'єм піраміди $ABCD$.

Об'єм піраміди обчислюється за формулою

$$V_{\text{пір.}} = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

$(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$ – мішаний добуток трьох векторів, які виходять з однієї вершини і на яких побудована піраміда.

Результатом мішаного добутку завжди є число.

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} &= \begin{vmatrix} 3 & 9 & -1 \\ 5 & 6 & -1 \\ 3 & 10 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 54 - 27 - 50 + 18 + 30 - 135 = -110. \end{aligned}$$

Обчислений мішаний добуток підставимо у формулу для обчислення об'єму піраміди.

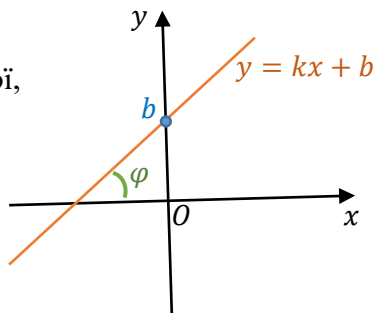
$$\begin{aligned} V_{\text{пір.}} &= \frac{1}{6} \cdot |-110| = \frac{1}{6} \cdot 110 = \frac{110}{6} = \\ &= \frac{55}{3} \text{ (кубічних одиниць)} \end{aligned}$$

ПРЯМА НА ПЛОЩИНІ

Завдання 1. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(7; 4)$ і утворює з віссю Ox кут $\varphi = 45^\circ$.

Щоб записати рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$y = kx + b, \quad k = \operatorname{tg} \varphi$$



За число b приймається координата y точки A , через яку проходить пряма.

У нашому випадку $b = 4$.

Коефіцієнт k обчислюється як тангенс кута φ , який утворюється між прямою і додатнім напрямком осі Ox .

$$k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

Підставимо отримані значення у формулу:

$$y = 1 \cdot x + 4$$

$y = x + 4$ – шукане рівняння прямої.

Зведемо отримане рівняння до загального рівняння прямої у вигляді $Ax + By + C = 0$.

$$y = x + 4$$

$$-x + y - 4 = 0$$

Завдання 2. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки $C(-3; -1)$ та $K(4; 5)$.

Щоб записати рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$(x_1; y_1)$ – координати першої точки, у нашому випадку точки C .

$(x_2; y_2)$ – координати другої точки, у нашому випадку точки K .

Підставимо координати заданих точок C та K у формулу.

$$\frac{x - (-3)}{4 - (-3)} = \frac{y - (-1)}{5 - (-1)}$$

$$\frac{x + 3}{4 + 3} = \frac{y + 1}{5 + 1}$$

$$\frac{x + 3}{7} = \frac{y + 1}{6} \quad - \text{шукане рівняння прямої}$$

Зведемо отримане рівняння до загального рівняння прямої.

$$\begin{aligned}\frac{x + 3}{7} &= \frac{y + 1}{6} \\ 6 \cdot (x + 3) &= 7 \cdot (y + 1) \\ 6x + 18 &= 7y + 7 \\ 6x - 7y + 18 - 7 &= 0 \\ 6x - 7y + 11 &= 0\end{aligned}$$

Завдання 3. Записати рівняння прямої, яка проходить через точку $M(-3; -1)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (5; 1)$.

Щоб записати рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$(x_0; y_0)$ – координати точки, у нашому випадку точки M .

$\vec{n} = (A; B)$ – координати вектора, перпендикулярного до прямої (нормальний вектор).

Підставимо координати точки M та нормального вектора $\vec{n}$ у формулу.

$$5 \cdot (x - (-3)) + 1 \cdot (y - 2) = 0$$

$$5 \cdot (x + 3) + 1 \cdot (y - 2) = 0 \text{ – шукане рівняння прямої.}$$

Зведемо отримане рівняння до загального рівняння прямої.

$$5x + 15 + y - 2 = 0$$

$$5x + y + 13 = 0.$$

Завдання 4. Записати а) канонічне та б) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $M(-3; 2)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (4; -3)$.

а) Щоб записати канонічне рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$$

$(x_0; y_0)$ – координати точки, у нашому випадку точки M .

$\vec{s} = (l; m)$ – координати вектора, паралельного до прямої (напрямний вектор).

Підставимо координати точки M та напрямного вектора $\vec{s}$ у формулу.

$$\frac{x - (-3)}{4} = \frac{y - 2}{-3}$$

$$\frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{-3} \quad \text{– шукане рівняння прямої}$$

Зведемо отримане рівняння до загального рівняння прямої.

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{4} &= \frac{y-2}{-3} \\ -3 \cdot (x+3) &= 4 \cdot (y-2) \\ -3x-9 &= 4y-8 \\ -3x-4y-9+8 &= 0 \\ -3x-4y-1 &= 0 \quad / \cdot (-1) \\ 3x+4y+1 &= 0\end{aligned}$$

б) Щоб записати параметричне рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$

$(x_0; y_0)$ – координати точки, у нашому випадку точки M .

$\vec{s} = (l; m)$ – координати вектора, паралельного до прямої (напрямний вектор).

Підставимо координати точки M та напрямного вектора $\vec{s}$ у формулу.

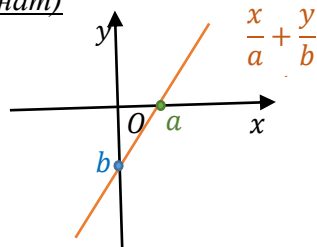
$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 + (-3)t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \quad \text{– шукане рівняння прямої}$$

Завдання 5. Записати рівняння прямої, яка проходить через дві точки з координатами $(-4; 0)$ та $(0; 3)$. (рівняння прямої у відрізках на осях координат)

Щоб записати рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$



$(a; 0)$ – координати першої точки.

$(0; b)$ – координати другої точки.

Підставимо координати заданих точок у формулу.

$$\frac{x}{-4} + \frac{y}{3} = 1 \quad - \text{шукане рівняння прямої}$$

Завдання 6. Знайти кут між прямими, заданими рівняннями $7x - 2y - 1 = 0$ та $2x - 7y - 6 = 0$.

В даному завданні прямі задані своїми загальними рівняннями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, тому кут між прямими шукатимемо як косинус кута за формулою:

$$\cos \alpha = \frac{|A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Підставимо задані в умові значення у формулу.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|7 \cdot 2 + (-2) \cdot (-7)|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-7)^2}} = \frac{|14 + 14|}{\sqrt{49 + 4} \cdot \sqrt{4 + 49}} = \\ &= \frac{|28|}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{53}} = \frac{28}{53} \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } \cos \alpha = \frac{28}{53}.$$

Якщо прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами $y_1 = k_1x + b_1$ та $y_2 = k_2x + b_2$, то кут між прямими шукатимемо як тангенс кута за формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{|k_1 \cdot k_2 + 1|}$$

Завдання 7. Знайти відстань від точки $A(1; 3)$ до прямої, заданої рівнянням $2x - y - 10 = 0$.

Щоб знайти відстань від заданої точки до заданої прямої застосуємо формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$(x_0; y_0)$ – координати точки, у нашому випадку точки A .

$A; B; C$ – коефіцієнти з рівняння прямої.

Підставимо задані величини у формулу.

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot 3 - 10|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|2 - 3 - 10|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{|-11|}{\sqrt{5}} = \frac{11}{\sqrt{5}}$$

Відповідь: $d = \frac{11}{\sqrt{5}}$.

ПРЯМА І ПЛОЩИНА У ПРОСТОРИ

Завдання 1. Скласти рівняння площини, яка проходить через три точки

$$K(1; 2; 3); L(-1; 2; 1); D(3; -1; 1).$$

Щоб записати рівняння площини, застосуємо формулу

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$(x_1; y_1; z_1)$ – координати першої точки, у нашому випадку точки K .

$(x_2; y_2; z_2)$ – координати другої точки, у нашому випадку точки L .

$(x_3; y_3; z_3)$ – координати третьої точки, у нашому випадку точки D .

Підставимо задані координати точок у формулу.

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -1 - 1 & 2 - 2 & 1 - 3 \\ 3 - 1 & -1 - 2 & 1 - 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Обчислимо визначник.

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z - 3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = (x - 1) \cdot 0 \cdot (-2) +$$

$$+ (y - 2) \cdot (-2) \cdot 2 + (z - 3) \cdot (-2) \cdot (-3) -$$
$$- 2 \cdot 0 \cdot (z - 3) - (-2) \cdot (y - 2) \cdot (-2) -$$

$$\begin{aligned}
 -(x-1) \cdot (-3) \cdot (-2) &= (y-2) \cdot (-4) + \\
 +(z-3) \cdot 6 - 4 \cdot (y-2) - 6 \cdot (x-1) &= \\
 = -4y + 8 + 6z - 18 - 4y + 8 - 6x + 6 &= \\
 = -6x - 8y + 6z + 4
 \end{aligned}$$

Обчислений результат прирівняємо до 0 і отримаємо шукане рівняння площини (у вигляді загального рівняння площини $Ax + By + Cz + D = 0$).

$$-6x - 8y + 6z + 4 = 0$$

Завдання 2. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $K(8; 5; 8)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (-4; 5; -3)$.

Щоб записати рівняння площини, застосуємо формулу

$$A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0$$

$A; B; C$ – координати вектора $\vec{n}$, перпендикулярного до площини (нормального вектора).

$(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки, у нашому випадку K .

Підставимо координати точки K та нормального вектора $\vec{n}$ у формулу.

$$\begin{aligned}
 -4 \cdot (x - 8) + 5 \cdot (y - 5) + (-3) \cdot (z - 8) &= 0 \\
 -4 \cdot (x - 8) + 5 \cdot (y - 5) - 3 \cdot (z - 8) &= 0 \\
 -4x + 32 + 5y - 25 - 3z + 24 &= 0 \\
 -4x + 5y - 3z + 31 &= 0 - \text{шукане рівняння площини.}
 \end{aligned}$$

Завдання 3. Знайти відстань від точки $M(1; 2; -3)$ до площини, заданої рівнянням $5x - 3y + z = 0$.

Щоб знайти відстань від заданої точки до заданої площини застосуємо формулу:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки, у нашому випадку точки M .
 $A; B; C; D$ – коефіцієнти з рівняння площини.

Підставимо задані величини у формулу.

$$\begin{aligned} d &= \frac{|5 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-3) + 0|}{\sqrt{5^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|5 - 6 - 3|}{\sqrt{25 + 9 + 1}} = \\ &= \frac{|-4|}{\sqrt{35}} = \frac{4}{\sqrt{35}} \end{aligned}$$

Відповідь: $d = \frac{4}{\sqrt{35}}$.

Завдання 4. Скласти рівняння прямої, яка проходить через дві точки $C(3; -1; 0)$ та $K(1; 0; -3)$.

Щоб записати рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

$(x_1; y_1; z_1)$ – координати першої точки, у нашому випадку точки C .

$(x_2; y_2; z_2)$ – координати другої точки, у нашому випадку точки K .

Підставимо координати заданих точок C та K у формулу.

$$\frac{x-3}{1-3} = \frac{y-(-1)}{0-(-1)} = \frac{z-0}{-3-0}$$

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3} \quad - \text{шукане рівняння прямої}$$

Завдання 5. Записати а) канонічне та б) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку $D(-1; 2; 0)$ паралельно до вектора $\vec{s} = (1; 0; -3)$.

а) Щоб записати канонічне рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$$

$(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки, у нашому випадку точки D .
 $\vec{s} = (l; m; n)$ – координати вектора, паралельного до прямої (напрямний вектор).

Підставимо координати точки D та напрямного вектора $\vec{s}$ у формулу.

$$\frac{x-(-1)}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-0}{-3}$$

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{-3} \quad - \text{шукане рівняння прямої}$$

б) Щоб записати параметричне рівняння прямої, застосуємо формулу:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

$(x_0; y_0; z_0)$ – координати точки, у нашому випадку точки D .
 $\vec{s} = (l; m; n)$ – координати вектора, паралельного до прямої (напрямний вектор).

Підставимо координати точки D та напрямного вектора $\vec{s}$ у формулу.

$$\begin{cases} x = -1 + 1 \cdot t \\ y = 2 + 0 \cdot t \\ z = 0 + (-3) \cdot t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = -3t \end{cases} \quad \text{– шукане рівняння прямої}$$

Завдання 6. Знайти кут між площиною $13x + 2y - 14z + 15 = 0$ та прямою $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-4}{-3}$.

Кут між площиною і прямою шукається як синус кута за формулою:

$$\sin \alpha = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$

$(l; m; n)$ – координати напрямного вектора.
 $A; B; C$ – коефіцієнти з рівняння площини.

Підставимо задані в умові значення у формулу.

$$\sin \alpha = \frac{|13 \cdot (-4) + 2 \cdot 5 + (-14) \cdot (-3)|}{\sqrt{13^2 + 2^2 + (-14)^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 5^2 + (-3)^2}} =$$

$$= \frac{|-52 + 10 + 42|}{\sqrt{169 + 4 + 196} \cdot \sqrt{16 + 25 + 9}} = \frac{|0|}{\sqrt{369} \cdot \sqrt{50}} = 0$$

Відповідь: $\sin \alpha = 0$.

Завдання 7. Знайти кут між двома площинами:
координатною площиною Oxy та площиною
 $13x + 2y - 14z + 15 = 0$.

Кут між площинами шукатимемо як косинус кута за формулою:

$$\cos \alpha = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$(A_1; B_1; C_1)$ – координати нормального вектора $\vec{n}_1$ першої площини.

$(A_2; B_2; C_2)$ – координати нормального вектора $\vec{n}_2$ другої площини.

Для площини Oxy : $\vec{n}_1 = (0; 0; 1)$

Для площини $13x + 2y - 14z + 15 = 0$: $\vec{n}_2 = (13; 2; -14)$

Підставимо дані значення у формулу.

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{0 \cdot 13 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-14)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{13^2 + 2^2 + (-14)^2}} = \\ &= \frac{-14}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{369}} = \frac{-14}{\sqrt{369}} \end{aligned}$$

Відповідь: $\cos \alpha = \frac{-14}{\sqrt{369}}$.

ГРАНИЦІ ФУНКЦІЙ

$$1. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x + 3}$$

Обчислення будь-якої границі починається з того, що замість аргументу x у функції підставляємо значення, до якого він прямує.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 1}{x + 3} = \frac{2 \cdot (-1) + 1}{-1 + 3} = \frac{-2 + 1}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} 2. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^3 + 1} &= \frac{(-1)^2 + 3 \cdot (-1) - 1}{(-1)^3 + 1} = \frac{1 - 3 - 1}{-1 + 1} \\ &= -\frac{3}{0} = \infty \end{aligned}$$

При обчисленні границь: $\frac{c}{0} = \infty$; $\frac{c}{\infty} = 0$, c – стале число.

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 7x + 4}{3x^2 + 4x - 1} = \frac{2 \cdot \infty^3 - 7 \cdot \infty + 4}{3 \cdot \infty^2 + 4 \cdot \infty - 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

Отримали $\frac{\infty}{\infty}$ – невизначеність. Тому проводимо перетворення функції: в чисельнику і знаменнику потрібно винести змінну x з найвищим показником степеня за дужки, в нашому випадку найвищий показник змінної x рівний числу 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 7x + 4}{3x^2 + 4x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^3} \cdot \left(2 - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3}\right)}{\cancel{x^3} \cdot \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2 - \frac{7}{\infty} + \frac{4}{\infty}}{\frac{3}{\infty} + \frac{4}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{2 - 0 + 0}{0 + 0 - 0} = \frac{2}{0} = \infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4} = \frac{4^3 - 64}{7 \cdot 4^2 - 27 \cdot 4 - 4} =$$

$$= \frac{64 - 64}{112 - 108 - 4} = \frac{0}{0}$$

Отримали $\frac{0}{0}$ – невизначеність. Тому проводимо перетворення функції: в чисельнику і знаменнику потрібно застосовувати формули скороченого множення або розкласти квадратне рівняння за коренями.

В чисельнику застосуємо формулу скороченого множення:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$\text{Отримаємо: } x^3 - 64 = x^3 - 4^3 = (x - 4)(x^2 + 4x + 16)$$

В знаменнику розкладемо квадратне рівняння за коренями:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$7x^2 - 27x - 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = (-27)^2 - 4 \cdot 7 \cdot (-4) = 729 + 112 = 841$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_1 = \frac{27 - \sqrt{841}}{2 \cdot 7} = \frac{27 - 29}{14} = -\frac{2}{14} = -\frac{1}{7};$$

$$x_2 = \frac{27 + \sqrt{841}}{2 \cdot 7} = \frac{27 + 29}{14} = \frac{56}{14} = 4.$$

$$\text{Отримаємо: } 7x^2 - 27x - 4 = 7\left(x + \frac{1}{7}\right)(x - 4)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{7x^2 - 27x - 4} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - 4)(x^2 + 4x + 16)}{7\left(x + \frac{1}{7}\right)(x - 4)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x + 16}{7\left(x + \frac{1}{7}\right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x + 16}{7x + 1} = \frac{4^2 + 4 \cdot 4 + 16}{7 \cdot 4 + 1} = \frac{16 + 16 + 16}{28 + 1} = \frac{48}{29}\end{aligned}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} = \frac{3 - \sqrt{0^2 + 9}}{\sqrt{0^2 + 1} - 1} = \frac{3 - \sqrt{9}}{\sqrt{1} - 1} = \frac{3 - 3}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Отримали $\frac{0}{0}$ – невизначеність. Тому проводимо перетворення функції: при наявності коренів квадратних в чисельнику або в знаменнику або і в чисельнику і в знаменнику одночасно потрібно домножувати чисельник і знаменник на спряжений множник, щоб застосувати формулу скороченого множення $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

У нашому випадку корінь квадратний є і в чисельнику $(3 - \sqrt{x^2 + 9})$ і в знаменнику $(\sqrt{x^2 + 1} - 1)$, тому домножувати чисельник і знаменник потрібно на спряжений множник до чисельника $(3 + \sqrt{x^2 + 9})$ і до знаменника $(\sqrt{x^2 + 1} + 1)$.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 1} - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((3 - \sqrt{x^2 + 9}) \cdot (3 + \sqrt{x^2 + 9})\right) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{\left((\sqrt{x^2 + 1} - 1) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)\right) \cdot (3 + \sqrt{x^2 + 9})} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3^2 - (\sqrt{x^2 + 9})^2) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{((\sqrt{x^2 + 1})^2 - 1^2) \cdot (3 + \sqrt{x^2 + 9})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9 - (x^2 + 9)) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{((x^2 + 1) - 1) \cdot (3 + \sqrt{x^2 + 9})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(9 - x^2 - 9) \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{(x^2 + 1 - 1) \cdot (3 + \sqrt{x^2 + 9})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2 \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x^2 \cdot (3 + \sqrt{x^2 + 9})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{3 + \sqrt{x^2 + 9}} = \frac{-(\sqrt{0^2 + 1} + 1)}{3 + \sqrt{0^2 + 9}} = \\
&= \frac{-(1 + 1)}{3 + 3} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2} = \frac{2 - \sqrt{0^2 + 4}}{3 \cdot 0^2} = \frac{2 - \sqrt{4}}{3 \cdot 0} = \frac{2 - 2}{0} = \frac{0}{0}$$

Отримали $\frac{0}{0}$ – невизначеність. Тому потрібно провести перетворення функції аналогічно до попереднього завдання.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{x^2 + 4}) \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 4})}{3x^2 \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 4})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^2 - (\sqrt{x^2 + 4})^2}{3x^2 \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - (x^2 + 4)}{3x^2 \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 4})} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - x^2 - 4}{3x^2 \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{3x^2 \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 4})} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{3 \cdot (2 + \sqrt{x^2 + 4})} = \frac{-1}{3 \cdot (2 + \sqrt{0^2 + 4})} = \\
&= \frac{-1}{3 \cdot (2 + \sqrt{4})} = \frac{-1}{3 \cdot (2 + 2)} = -\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \frac{\sin(5 \cdot 0)}{\sin(2 \cdot 0)} = \frac{\sin 0}{\sin 0} = \frac{0}{0}$$

Отримали $\frac{0}{0}$ – невизначеність. Якщо функція містить тригонометричні функції, тому потрібно провести перетворення функції (за тригонометричними рівностями) щоб застосувати I важливу (визначну) границю або її особливі випадки.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot 2x} = \\
&= \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 5x}{1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 2x} = \frac{1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} 5x}{\lim_{x \rightarrow 0} 2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$$

Проведемо перетворення функції так, щоб застосувати II важливу (визначну) границю або її особливі випадки

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^x}{(x-1)^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{x^x \cdot \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\left(1 - \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x} = \frac{e}{e^{-1}} = e^2 \end{aligned}$$

ПОХІДНІ ФУНКЦІЙ

Завдання 1. Знайти похідну функції

$$y = \sqrt{x} + \cos x + a^x + \frac{1}{5} \ln x + 4.$$

Похідна суми/різниці функцій:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= (\sqrt{x})' + (\cos x)' + (a^x)' + \left(\frac{1}{5} \ln x\right)' + (4)' = \\ &= (\sqrt{x})' + (\cos x)' + (a^x)' + \frac{1}{5} \cdot (\ln x)' + 4' = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x + a^x \cdot \ln a + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{x} + 0 = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x + a^x \cdot \ln a + \frac{1}{5x} \end{aligned}$$

Завдання 2. Знайти похідну функції $y = \sin x \cdot \operatorname{tg} x$

Похідна добутку функцій:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= (\sin x)' \cdot \operatorname{tg} x + \sin x \cdot (\operatorname{tg} x)' = \\ &= \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \sin x \cdot \frac{1}{(\cos x)^2} = \\ &= \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \frac{\sin x}{(\cos x)^2} = \cos x \cdot \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x \cdot \frac{1}{\cos x} = \\ &= \operatorname{tg} x \cdot \left(\cos x + \frac{1}{\cos x} \right) \end{aligned}$$

Завдання 3. Знайти похідну функції $y = \frac{\cos x}{a^x}$

Похідна частки функцій:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(\cos x)' \cdot a^x - \cos x \cdot (a^x)'}{(a^x)^2} = \\ &= \frac{-\sin x \cdot a^x - \cos x \cdot a^x \cdot \ln a}{a^{2x}} = \\ &= \frac{a^x \cdot (-\sin x - \cos x \cdot \ln a)}{a^{2x}} = \frac{-\sin x - \cos x \cdot \ln a}{a^x} \end{aligned}$$

Завдання 4. Знайти похідну функції

$$y = (\ln(2 \sin x^3))^2$$

Похідна складеної функції:

$$y = f(u); u = g(x) \text{ то } y'_x = f'_u \cdot u'_x$$

1) знайдемо похідну від зовнішньої степеневі функції:

$$(\ln(2 \sin x^3))^2;$$

2) знайдемо похідну від логарифмічної функції:

$$\ln(2 \sin x^3);$$

3) знайдемо похідну від тригонометричної функції: $\sin x^3$;

4) знайдемо похідну від степеневі функції: x^3 .

$$\begin{aligned} y' &= 2 \cdot \ln(2 \sin x^3) \cdot \frac{1}{2 \sin x^3} \cdot 2 \cdot \cos x^3 \cdot 3x^2 = \\ &= 2 \cdot \ln(2 \sin x^3) \cdot \frac{\cos x^3}{\sin x^3} \cdot 3x^2 = \\ &= 6x^2 \cdot \ln(2 \sin x^3) \cdot \operatorname{ctg} x^3 \end{aligned}$$

ПОХІДНА НЕЯВНО ЗАДАНОЇ ФУНКЦІЇ

Завдання 5. Знайти похідну y' функції

$$x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$$

У такому випадку величину y розглядаємо як складену функцію.

$$x^2 + y^2 - 2y + 3x = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 3x - 1 = 0$$

$$(x^2)' + (y^2)' - (2y)' + (3x)' - 1' = 0$$

$$(x^2)' + (y^2)' - 2 \cdot y' + 3 \cdot x' - 1' = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' - 2y' + 3 \cdot 1 - 0 = 0$$

$$2x + 2y \cdot y' - 2y' + 3 = 0$$

$$2y \cdot y' - 2y' = -2x - 3$$

$$y' \cdot (2y - 2) = -2x - 3$$

$$y' = \frac{-2x - 3}{2y - 2}$$

Завдання 6. Знайти похідну y'_x якщо

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \end{cases}; \quad a = \text{const}$$

Похідна функції заданої параметрично:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}; \quad x'_t \neq 0$$

$$x'_t = (a \cdot \cos t)' = a \cdot (-\sin t) = -a \cdot \sin t$$

$$y'_t = (a \cdot \sin t)' = a \cdot \cos t$$

$$y'_x = \frac{a \cdot \cos t}{-a \cdot \sin t} = \frac{\cos t}{-\sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

ДОСЛІДЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОХІДНИХ

Завдання. Дослідити та побудувати графік функції

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

1. Знайти область визначення функції.

В даній функції зауважуємо, що знаменник не може дорівнювати нулю:

$$D(f): x^2 \neq 0; x \neq 0 \text{ або } x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

2. Знайти точки перетину функції з осями координат.

Визначення точок перетину з віссю Ox (у рівняння функції потрібно підставити значення $y = 0$.)

$$\frac{x^3 + 4}{x^2} = 0$$

$$x^3 + 4 = 0$$

$$x^3 = -4$$

$$x = \sqrt[3]{-4}$$

$$x \approx -1,7$$

Визначення точок перетину з віссю Oy (у рівняння функції потрібно підставити значення $x = 0$.)

В першому пункті було визначено, що $x \neq 0$. Тому ми не можемо підставити значення $x = 0$ і робимо висновок, що дана функція не має точок перетину з віссю Oy .

3. Перевірити функцію на парність/непарність.

У функцію замість аргументу x потрібно підставити аргумент $-x$.

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 4}{(-x)^2} = \frac{-x^3 + 4}{x^2} \neq f(x) \neq -f(x)$$

Оскільки $f(-x) \neq f(x)$ та $f(-x) \neq -f(x)$, то функція ні парна ні непарна.

4. Перевірити функцію на періодичність.

Функція не містить періодичних функцій, тому дана функція неперіодична.

5. Точки розриву.

Перевіряємо точку, яка виключається з області визначення заданої функції: $x \neq 0$.

Шукаємо лівосторонню і правосторонню границі у цій точці.

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \frac{0 + 4}{0} = \frac{4}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x^3 + 4}{x^2} = \frac{0 + 4}{0} = \frac{4}{0} = \infty$$

Отже, $x = 0$ – точка розриву.

6. Критичні точки, екстремуми функції, точки мінімуму і максимуму, проміжки зростання і спадання.

Знаходимо похідну заданої функції

$$f'(x) = \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} \right)' = \frac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3 + 4) \cdot 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{3x^4 - 2x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

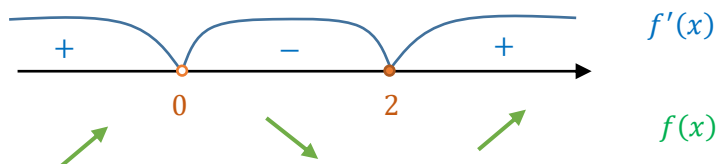
Прирівнюємо похідну до нуля і шукаємо розв'язки.

$$\frac{x^3 - 8}{x^3} = 0$$

$$x^3 - 8 = 0 \quad x^3 \neq 0$$

$$x^3 = 8 \quad x \neq 0$$

$$x = 2$$



Точка $x = 0$ – виключена; точка $x = 2$ – точка мінімуму.
Обчислимо значення функції у точці мінімуму $x = 2$:

$$f(2) = \frac{2^3 + 4}{2^2} = \frac{8 + 4}{4} = 3$$

Координати точки мінімуму: $(2; 3)$

7. Опуклість, вгнутість функції; точки перегину функції.

Знаходимо другу похідну заданої функції

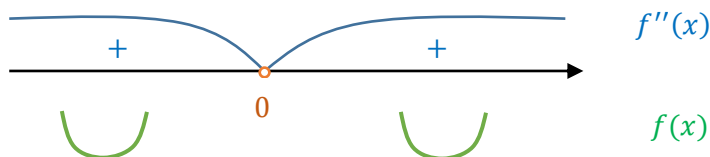
$$f''(x) = \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} \right)'' = \left(\frac{x^3 - 8}{x^3} \right)' =$$

$$= \frac{3x^2 \cdot x^3 - (x^3 - 8) \cdot 3x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{3x^5 - 3x^5 + 24x^2}{x^6} = \frac{24x^2}{x^6} = \frac{24}{x^4}$$

Прирівнюємо знайдену похідну до нуля і шукаємо розв'язки.

$$\frac{24}{x^4} = 0; \quad x \neq 0$$



Графік опуклий на всій області визначення.

8. Асимптоти.

1) Вертикальні асимптоти.

Вертикальною асимптотою є пряма $x = 0$ (точка розриву).

2) Похилі асимптоти.

Знаходяться за формулою:

$$y = kx + b; \quad k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}; \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$$

Перевіримо, чи існують похилі асимптоти. Для цього обчислимо величини k та b .

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^3 + 4}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = 1$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4 - x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0 \end{aligned}$$

Підставимо обчислені величини k та b у рівняння асимптоти.

$$y = 1 \cdot x + 0$$

$y = x$ – похила асимптота.

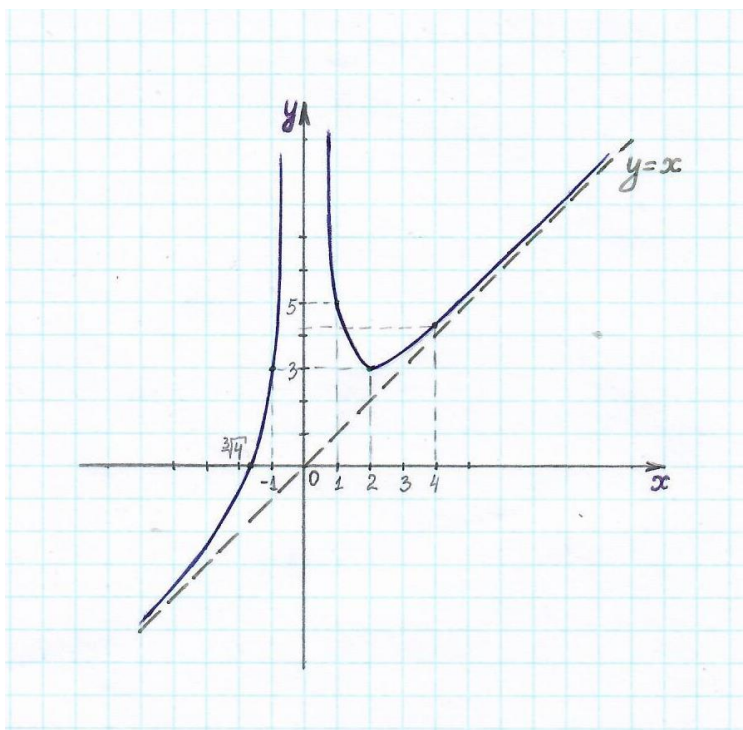
Знайдемо додаткові точки:

$$f(-1) = \frac{(-1)^3 + 4}{(-1)^2} = \frac{-1 + 4}{1} = 3$$

$$f(1) = \frac{1^3 + 4}{1^2} = \frac{1 + 4}{1} = 5$$

$$f(4) = \frac{4^3 + 4}{4^2} = \frac{68}{16} = \frac{34}{8} = \frac{17}{4} = 4,25$$

Будуємо графік опираючись на всі вище знайдені дані.



ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Завдання 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції

$$z = x^4 + 2xy - y^3 + 5.$$

Знайдемо похідну по змінній x . В цьому випадку величина y розглядається як стала величина ($y = \text{const}$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= z'_x = (x^4 + 2xy - y^3 + 5)'_x = \\ &= (x^4)'_x + (2xy)'_x - (y^3)'_x + (5)'_x = \\ &= 4x^3 + 2y - 0 + 0 = 4x^3 + 2y\end{aligned}$$

Знайдемо похідну по змінній y . В цьому випадку величина x розглядається як стала величина ($x = \text{const}$)

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= z'_y = (x^4 + 2xy - y^3 + 5)'_y = \\ &= (x^4)'_y + (2xy)'_y - (y^3)'_y + (5)'_y = \\ &= 0 + 2x - 3y^2 + 0 = 2x - 3y^2\end{aligned}$$

Завдання 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції

$$z = 2x^3y^2 + 2x.$$

Похідні шукаємо аналогічно до попереднього завдання.

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= z'_x = (2x^3y^2 + 2x)'_x = (2x^3y^2)'_x + (2x)'_x = \\ &= 2y^2 \cdot 3x^2 + 2 = 6x^2y^2 + 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= z'_y = (2x^3y^2 + 2x)'_y = (2x^3y^2)'_y + (2x)'_y = \\ &= 2x^3 \cdot 2y + 0 = 4x^3y\end{aligned}$$

НЕВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

Завдання І. Обчислити інтеграли за таблицею первісних (безпосереднє інтегрування).

$$1. \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

$$2. \int 5^x dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

$$\begin{aligned} 3. \int (2 - 3e^x + x) dx &= \int 2 dx - \int 3e^x dx + \int x dx = \\ &= 2 \int dx - 3 \int e^x dx + \int x dx = 2x - 3e^x + \frac{x^2}{2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \int \left(3x^2 - \frac{2}{1+x^2} - 5 \right) dx &= \\ &= 3 \int x^2 dx - 2 \int \frac{1}{1+x^2} dx - 5 \int dx = \\ &= \frac{3x^3}{3} - 2 \operatorname{arctg} x - 5x + C = x^3 - 2 \operatorname{arctg} x - 5x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5. \int \left(5^x - 3 \sin x + \frac{4}{x} \right) dx &= \\ &= \int 5^x dx - 3 \int \sin x dx + 4 \int \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{5^x}{\ln 5} + 3 \cos x + 4 \ln|x| + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
6. \int \left(5x^2 - 7x + \frac{9}{x} \right) dx &= 5 \int x^2 dx - 7 \int x dx + 9 \int \frac{1}{x} dx = \\
&= \frac{5x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} + 9 \ln|x| + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
7. \int (1 - \sqrt{x})^2 dx &= \int (1 - 2\sqrt{x} + x) dx = \int dx - \\
&- 2 \int \sqrt{x} dx + \int x dx = \int dx - 2 \int x^{1/2} dx + \int x dx = \\
&= x - 2 \cdot \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} + \frac{x^2}{2} + C = x - \frac{2x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^2}{2} + C = \\
&= x - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + \frac{x^2}{2} + C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
8. \int \frac{6x^3 - 5}{x^2} dx &= \int \frac{6x^3}{x^2} dx - \int \frac{5}{x^2} dx = \\
&= 6 \int x dx - 5 \int x^{-2} dx = 6 \cdot \frac{x^2}{2} - 5 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + C = \\
&= 3x^2 + 5x^{-1} + C = 3x^2 + \frac{5}{x} + C
\end{aligned}$$

Завдання II. Обчислити інтеграли методом заміни змінної (підстановки).

$$\begin{aligned} 1. \int \cos 3x \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = 3x \\ dt = (3x)' dx = 3dx \\ dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right| = \int \cos t \cdot \frac{dt}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \int \cos t \, dt = \frac{1}{3} \sin t + C = \frac{1}{3} \sin 3x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \int x \cdot 5^{x^2} \, dx &= \left| \begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = (x^2)' dx = 2x dx \\ x dx = \frac{dt}{2} \end{array} \right| = \int 5^t \cdot \frac{dt}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int 5^t \, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^t}{\ln 5} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{x^2}}{\ln 5} + C = \frac{5^{x^2}}{2 \ln 5} + C \end{aligned}$$

Завдання III. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами

Для обчислення інтегралів методом інтегрування частинами застосовується формула:

$$\int u \, dv = uv + C_1 - \int v \, du$$

Деякі рекомендації щодо вибору множників u та dv в методі інтегрування частинами наведені в таблиці нижче.

№	Вид інтегралу	u	dv
1	$\int P(x) \cdot \begin{cases} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{cases} dx$ $P(x)$ – многочлен; k – дійсне число ($k \neq 0$)	$u = P(x)$	$dv = \begin{cases} e^{kx} \\ \sin kx \\ \cos kx \end{cases} dx$
2	$\int R(x) \cdot \begin{cases} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \arctg kx \\ (\ln x)^m \end{cases} dx$ $R(x)$ – алгебраїчна функція; k – дійсне число ($k \neq 0$); m – натуральне число	$u = \begin{cases} \arcsin kx \\ \arccos kx \\ \arctg kx \\ (\ln x)^m \end{cases}$	$dv = R(x)dx$
3	$\int e^{kx} \cdot \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} dx$	Можливий довільний вибір множників u та dv. Хоча найчастіше використовується наступний вибір: $u = e^{kx}; dv = \begin{cases} \sin kx \\ \cos kx \end{cases} dx$ Після двократного застосування формули інтегрування частинами одержується лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу.	

$$1. \int x \cdot e^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x; \quad du = (x)' dx = dx \\ dv = e^x dx; \quad v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right| =$$

$$= x \cdot e^x + C_1 - \int e^x dx = x \cdot e^x + C_1 - e^x + C_2 =$$

$$= x \cdot e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

$$2. \int (2x - 3) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x - 3; \quad du = 2dx \\ dv = \cos x dx; \quad v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (2x - 3) \sin x + C_1 - \int \sin x \cdot 2 dx =$$

$$= (2x - 3) \sin x + C_1 - 2 \int \sin x dx =$$

$$= (2x - 3) \sin x + C_1 - 2 \cdot (-\cos x) + C_2 =$$

$$= (2x - 3) \sin x + 2 \cos x + C$$

$$3. \int 3x^3 \cdot \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x} dx \\ dv = 3x^3 dx; \quad v = \frac{3}{4} x^4 \end{array} \right| =$$

$$= \ln x \cdot \frac{3}{4} x^4 + C_1 - \int \frac{3}{4} x^4 \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{3}{4} x^4 \ln x + C_1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C_2 = \frac{3}{4} x^4 \left(\ln x - \frac{1}{4} \right) + C$$

$$4. \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = (e^{2x})' dx = 2e^{2x} dx \\ dv = \sin 3x dx; \quad v = \int \sin 3x dx = -\frac{\cos 3x}{3} \end{array} \right| =$$

$$= -e^{2x} \cdot \frac{\cos 3x}{3} + C_1 - \int \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) \cdot 2e^{2x} dx =$$

$$= -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + C_1 + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cdot \cos 3x dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} u = e^{2x}; \quad du = (e^{2x})' dx = 2e^{2x} dx \\ dv = \cos 3x dx; \quad v = \int \cos 3x dx = \frac{\sin 3x}{3} \end{array} \right| = \\
&= -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + C_1 + \\
&\quad + \frac{2}{3} \left(\frac{e^{2x} \sin 3x}{3} + C_2 - \int \frac{\sin 3x}{3} \cdot 2e^{2x} dx \right) = \\
&= -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \sin 3x}{9} + C_3 - \frac{4}{9} \int e^{2x} \cdot \sin 3x dx
\end{aligned}$$

Одержано лінійне рівняння відносно шуканого інтегралу. Для спрощення зробимо позначення:

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x dx = I$$

Перепишемо лінійне рівняння з врахуванням позначення та розв'яжемо його.

$$I = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \sin 3x}{9} + C_3 - \frac{4}{9} I$$

$$I + \frac{4}{9} I = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \sin 3x}{9} + C_3$$

$$\frac{13}{9} I = -\frac{e^{2x} \cos 3x}{3} + \frac{2e^{2x} \sin 3x}{9} + C_3$$

$$\frac{13}{9} I = \frac{-3e^{2x} \cos 3x + 2e^{2x} \sin 3x}{9} + C_3$$

$$I = \frac{-3e^{2x} \cos 3x + 2e^{2x} \sin 3x}{13} + C$$

$$\int e^{2x} \cdot \sin 3x \, dx = \frac{-3e^{2x} \cos 3x + 2e^{2x} \sin 3x}{13} + C$$

ВИЗНАЧЕНІ ІНТЕГРАЛИ

Для обчислення визначених інтегралів застосовується формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

a – нижня межа інтегрування;

b – верхня межа інтегрування.

Завдання І. Обчислити визначені інтеграли за таблицею первісних (безпосереднє інтегрування).

$$1. \int_{-1}^3 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_{-1}^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{(-1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

$$2. \int_2^3 (1 + 2x + 3x^2) dx = \left(x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 =$$

$$= (x + x^2 + x^3) \Big|_2^3 = (3 + 3^2 + 3^3) - (2 + 2^2 + 2^3) = \\ = 3 + 9 + 27 - 2 - 4 - 8 = 25$$

$$3. \int_0^4 (5^x + x - e^x) dx = \left(\frac{5^x}{\ln 5} + \frac{x^2}{2} - e^x \right) \Big|_0^4 =$$

$$= \left(\frac{5^4}{\ln 5} + \frac{4^2}{2} - e^4 \right) - \left(\frac{5^0}{\ln 5} + \frac{0^2}{2} - e^0 \right) =$$

$$= \frac{625}{\ln 5} + 8 - e^4 - \frac{1}{\ln 5} - 0 + 1 = \frac{624}{\ln 5} - e^4 + 9$$

Завдання II. Обчислити інтеграли методом заміни змінної (підстановки).

$$\begin{aligned}
 1. \int_0^{\ln 5} \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3} dx &= \\
 &= \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{e^x - 1}; \quad t^2 = e^x - 1; \\ e^x = t^2 + 1; \quad 2t dt = e^x dx \\ \text{Нові межі інтегрування:} \\ t(a) = t_1 = \sqrt{e^0 - 1} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0 \\ t(b) = t_2 = \sqrt{e^{\ln 5} - 1} = \sqrt{5 - 1} = \sqrt{4} = 2 \end{array} \right| = \\
 &= \int_0^2 \frac{t \cdot 2t dt}{t^2 + 1 + 3} = \int_0^2 \frac{2t^2 dt}{t^2 + 4} = 2 \int_0^2 \frac{t^2 dt}{t^2 + 4} = \\
 &= 2 \int_0^2 \frac{t^2 + 4 - 4}{t^2 + 4} dt = 2 \int_0^2 \left(\frac{t^2 + 4}{t^2 + 4} - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = \\
 &= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{4}{t^2 + 4} \right) dt = 2 \left(t - 2 \operatorname{arctg} \frac{t}{2} \right) \Big|_0^2 = \\
 &= 2 \left(\left(2 - 2 \operatorname{arctg} \frac{2}{2} \right) - \left(0 - 2 \operatorname{arctg} \frac{0}{2} \right) \right) = \\
 &= 2(2 - 2 \operatorname{arctg} 1 + 2 \operatorname{arctg} 0) = 4 - 4 \cdot \frac{\pi}{4} + 4 \cdot 0 = 4 - \pi
 \end{aligned}$$

Завдання III. Обчислити інтеграли методом інтегрування частинами

Для обчислення визначених інтегралів методом інтегрування частинами застосовується формула:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$$

Вибір множників u та dv проводиться таким чином як і в невизначеному інтегралі.

$$\begin{aligned} 1. \int_1^e x \cdot \ln x \, dx &= \left| \begin{array}{l} u = \ln x; \, du = (\ln x)' dx = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx; \, v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \\ &= \left(\ln x \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_1^e = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 \cdot \ln e}{2} - \frac{1^2 \cdot \ln 1}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right) = \\ &= \frac{e^2 \cdot 1}{2} - \frac{1^2 \cdot 0}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \\ &= \frac{2e^2 - e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(e^2 + 1) \end{aligned}$$

ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНИХ ІНТЕГРАЛІВ

Завдання 1. Обчислити площу фігури, обмеженої кривою $y = \frac{4x-x^2}{3}$ та координатною віссю Ox .

Дана фігура обмежена кривою та координатною віссю. Для обчислення площі застосуємо формулу:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$a; b$ – точки перетину кривої з віссю Ox .
 $f(x)$ – рівняння кривої.

Знайдемо точки перетину даної кривої з віссю Ox . Для цього прирівняємо рівняння кривої до нуля і знайдемо розв'язки рівняння.

$$\frac{4x - x^2}{3} = 0$$

$$4x - x^2 = 0$$

$$x(4 - x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$4 - x = 0$$

$$-x = -4$$

$$x_2 = 4$$

Знайдені розв'язки і є межами інтегрування:

$$a = 0; b = 4$$

Підставимо рівняння кривої і знайдені межі інтегрування у формулу і обчислимо площу фігури.

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{4x - x^2}{3} dx &= \frac{1}{3} \int_0^4 (4x - x^2) dx = \\
&= \frac{1}{3} \cdot \left(\int_0^4 4x dx - \int_0^4 x^2 dx \right) = \frac{1}{3} \cdot 4 \int_0^4 x dx - \frac{1}{3} \int_0^4 x^2 dx = \\
&= \frac{4}{3} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^4 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \Big|_0^4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^4 = \\
&= \frac{2}{3} \cdot x^2 \Big|_0^4 - \frac{1}{9} \cdot x^3 \Big|_0^4 = \frac{2}{3} \cdot (4^2 - 0^2) - \frac{1}{9} \cdot (4^3 - 0^3) = \\
&= \frac{2}{3} \cdot 16 - \frac{1}{9} \cdot 64 = \frac{32}{3} - \frac{64}{9} = \frac{96 - 64}{9} = \frac{32}{9}
\end{aligned}$$

Відповідь: $S = \frac{32}{9}$ (квадратних одиниць).

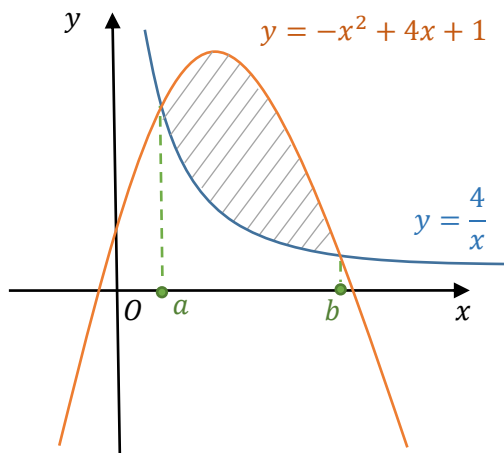
Завдання 2. Обчислити площу фігури, обмеженої двома кривими, що задані рівняннями

$$y_1 = \frac{4}{x}; \quad y_2 = -x^2 + 4x + 1$$

Визначений інтеграл застосовується для обчислення площі криволінійної трапеції за формулою:

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$$

Зарисуємо схематичні графіки кривих і виділимо фігуру, площу якої потрібно шукати.



Знайдемо точки перетину даних кривих (потрібно розв'язати систему рівнянь або прирівняти y_1 до y_2 та знайти розв'язки).

$$\begin{cases} y = \frac{4}{x} \\ y = -x^2 + 4x + 1 \end{cases} \quad \text{або} \quad \frac{4}{x} = -x^2 + 4x + 1$$

Отримаємо розв'язки: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 4$.

З рисунку помітно, що крива $y_2 = -x^2 + 4x + 1$ – верхня межа фігури, площу якої потрібно знайти, а крива $y_1 = \frac{4}{x}$ – нижня межа. Також точки перетину даних графіків є межами інтегрування: $a = 1$; $b = 4$.

Підставимо рівняння кривих і знайдені межі інтегрування у формулу і обчислимо площу фігури.

$$\begin{aligned}
& \int_1^4 \left(-x^2 + 4x + 1 - \frac{4}{x} \right) dx = \\
& = - \int_1^4 x^2 dx + 4 \int_1^4 x dx + \int_1^4 dx - 4 \int_1^4 \frac{dx}{x} = \\
& = \left(-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} + x - 4 \cdot \ln x \right) \Big|_1^4 = \\
& = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + x - 4 \cdot \ln x \right) \Big|_1^4 = \\
& = \left(-\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 + 4 - 4 \cdot \ln 4 \right) - \\
& \quad - \left(-\frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1^2 + 1 - 4 \cdot \ln 1 \right) = \\
& = -\frac{64}{3} + 32 + 4 - 4 \cdot \ln 4 + \frac{1}{3} - 2 - 1 + 4 \cdot \ln 1 = \\
& \quad = 12 - 4 \cdot \ln 4
\end{aligned}$$

Відповідь: $S = 12 - 4 \cdot \ln 4$ (квадратних одиниць).

Завдання 3. Обчислити довжину дуги параболи

$y = \frac{x^2}{2}$ від точки $x = 0$ до точки $x = 1$.

Довжину дуги потрібно шукати за формулою:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$a; b$ – межі інтегрування, в даному випадку $a = 0; b = 1$.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot (x^2)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

Підставимо наші дані у формулу для обчислення довжини дуги.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx &= \left(\frac{x}{2} \cdot \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln |x + \sqrt{1+x^2}| \right) \Big|_0^1 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+1^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln |1 + \sqrt{1+1^2}| \right) - \\ &\quad - \left(\frac{0}{2} \cdot \sqrt{1+0^2} + \frac{1}{2} \cdot \ln |0 + \sqrt{1+0^2}| \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \ln |1 + \sqrt{2}| - 0 = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})) \end{aligned}$$

Відповідь: $l = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2}))$.

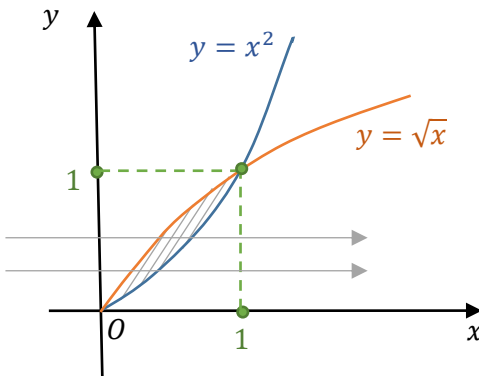
КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

Завдання 1. Змінити порядок інтегрування у подвійному інтегралі

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$$

Опираючись на першу частину інтегралу $\left(\int_0^1 dx\right)$ визначаємо, що величина x змінюється від 0 до 1 ($0 \leq x \leq 1$); опираючись на другу частину інтегралу $\left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy\right)$ визначаємо, що величина y змінюється від x^2 до $\sqrt{x}$ ($x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$) (рухаємось вздовж осі Oy).

Потрібно схематично зобразити область інтегрування і розглянути її саме на проміжку ($0 \leq x \leq 1$).



При зміні порядку інтегрування уже величина y буде змінюватись від 0 до 1.

А рухаючись уже паралельно осі Ox (як вказано на рисунку сірими стрілками) межі інтегрування будуть від $y = \sqrt{x}$ до $y = x^2$.

Знайдемо межу a : $y = \sqrt{x} \Rightarrow x = y^2$.

Знайдемо межу b : $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$.

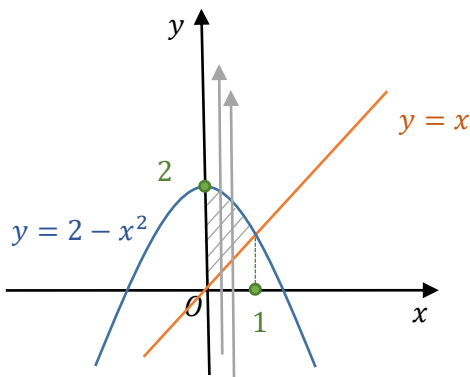
Тепер отримуємо:

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$$

Завдання 2. Область інтегрування D обмежена лініями $y = x$; $y = 2 - x^2$; $x = 0$. Обчислити подвійний інтеграл

$$\iint_D xy^2 dx dy$$

Спершу потрібно схематично зобразити область інтегрування D . Для цього зобразимо в декартовій системі координат усі лінії, якими вона обмежена.



Знайдемо межі інтегрування в напрямку осі Oy .

Величина x змінюється від 0 до 1. По змінній y нижня межа $y = x$, верхня межа $y = 2 - x^2$.

Використаємо визначені межі при обчисленні.

$$\iint_D xy^2 dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} xy^2 dy =$$

При обчисленні починаємо працювати з другою частиною інтегралу величину x розглядаємо як сталу величину (як число) і обчислюємо первісну від функції по y .

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 x \cdot \left(\frac{y^3}{3} \Big|_x^{2-x^2} \right) dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x \cdot \left(y^3 \Big|_x^{2-x^2} \right) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x \cdot ((2-x^2)^3 - x^3) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 (x \cdot (2-x^2)^3 - x^4) dx = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x \cdot (2-x^2)^3 dx - \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx = \\ &= -\frac{1}{6} \int_0^1 (2-x^2)^3 d(2-x^2) - \frac{1}{3} \int_0^1 x^4 dx = \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{(2-x^2)^4}{4} \Big|_0^1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \\ &= -\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot ((2-1^2)^4 - (2-0^2)^4) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot (1^5 - 0^5) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{24} \cdot (3^4 - 2^4) - \frac{1}{15} \cdot 1 = -\frac{1}{24} \cdot 65 - \frac{1}{15} = \\
&= -\frac{65}{24} - \frac{1}{15} = -\frac{111}{40}
\end{aligned}$$

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

Завдання 1. Розв'язати диференціальне рівняння з відокремлюючими змінними:

$$y' = e^{x+y}$$

Спершу запишемо y' у вигляді $\frac{dy}{dx}$. Також розпишемо e^{x+y} у вигляді $e^x \cdot e^y$

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y$$

– це диференціальне рівняння з відокремлюючими змінними (можемо відділити (розділити) всі елементи з величиною x та всі елементи з величиною y).

Помножимо дане рівняння на dx та поділимо на e^y .

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot e^y \quad / \cdot \frac{dx}{e^y}; \quad e^y \neq 0$$

$$\frac{dy}{e^y} = e^x \cdot dx$$

$$e^{-y} \cdot dy = e^x \cdot dx$$

Після того як по одну сторону від знаку дорівнює отримаємо всі елементи з величиною y , а по іншу сторону – всі елементи з величиною x , проінтегруємо ліву і праву частину.

$$\int e^{-y} dy = \int e^x \cdot dx$$

$$-e^{-y} + C_1 = e^x + C_2$$

$-e^{-y} = e^x + C$ – загальний розв’язок даного диференціального рівняння з відокремлюючими змінними

Перевіримо на існування особливих розв’язків. Для цього перевіримо $e^y = 0$, оскільки ми на нього ділили і вказували $e^y \neq 0$ (таким чином могли «загубити» деякі розв’язки).

$e^y = 0$ – дана рівність розв’язків немає ($y \in \emptyset$).

Отже, особливих розв’язків немає.

Завдання 2. Розв’язати диференціальне рівняння з відокремлюючими змінними:

$$\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$$

В даному записі диференціального рівняння можна відразу приступати до розділення елементів з величинами x та y .

$$\sqrt{y^2 + 1} dx = xy dy$$

Перенесемо все в ліву сторону від знаку «=». Поділимо на x та на $\sqrt{y^2 + 1}$.

$$\sqrt{y^2 + 1} dx - xy dy = 0$$

$$\sqrt{y^2 + 1} dx - xy dy = 0 / \cdot \frac{1}{x\sqrt{y^2 + 1}}; \quad x \neq 0; \quad \sqrt{y^2 + 1} \neq 0$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = 0$$

Проінтегруємо:

$$\int \frac{dx}{x} - \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} = C$$

Обчислимо обидва інтеграли окремо:

$$1) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\begin{aligned} 2) \int \frac{y dy}{\sqrt{y^2 + 1}} &= \left| \begin{array}{l} y^2 + 1 = t^2; \quad \sqrt{y^2 + 1} = t \\ 2t dt = 2y dy; \quad y dy = t dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{t dt}{t} = \int dt = t = \sqrt{y^2 + 1} + C \end{aligned}$$

Отримані результати підставимо у рівняння.

$$\ln|x| - \sqrt{y^2 + 1} = C$$

$\ln|x| - \sqrt{y^2 + 1} - C = 0$ – загальний розв'язок диференціального рівняння.

Перевіримо на існування особливих розв'язків.

$$1) x = 0$$

$$2) \sqrt{y^2 + 1} = 0; y^2 + 1 = 0; y^2 = -1; y \in \emptyset$$

Отже, $x = 0$ – особливий розв'язок даного диференціального рівняння.

Завдання 3. Розв'язати однорідне диференціальне рівняння:

$$xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y$$

Спершу запишемо рівняння у вигляді $y' = \dots$ і прирівняємо до $f(x, y)$.

$$y' = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x} = f(x, y)$$

Перевіримо чи задане рівняння справді є однорідне (перевіримо чи виконується умова $f(tx, ty) = t^k \cdot f(x, y)$)

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \frac{2\sqrt{t^2x^2 + t^2y^2} + ty}{tx} = \frac{2\sqrt{t^2(x^2 + y^2)} + ty}{tx} = \\ &= \frac{2t\sqrt{x^2 + y^2} + ty}{tx} = \frac{t(2\sqrt{x^2 + y^2} + y)}{tx} = \\ &= \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x} = f(x, y) = t^0 \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

Умова виконується. Задане диференціальне рівняння є однорідним. Приступимо до розв'язування.

Вводимо заміну:

$$y = tx; t = \frac{y}{x}$$

$$y' = t'x + t$$

Також перетворимо наше рівняння перед тим як підставляти заміну.

$$y' = \frac{2\sqrt{x^2 + y^2} + y}{x}$$

$$y' = 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$$

Підставляємо заміну:

$$t'x + t = 2 \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{tx}{x}\right)^2} + \frac{tx}{x}$$

$$t'x + t = 2 \cdot \sqrt{1 + t^2} + t$$

Запишемо t' у вигляді $\frac{dt}{dx}$ та перенесем у рівнянні все в ліву сторону від знаку « $=$ ».

$$\frac{dt}{dx} \cdot x + t - 2 \cdot \sqrt{1 + t^2} - t = 0$$

$$x \cdot \frac{dt}{dx} - 2 \cdot \sqrt{1 + t^2} = 0$$

– отримали диференціальне рівняння з відокремлюючими змінними.

Розв'яжемо отримане рівняння за вже відомим алгоритмом.

$$x \cdot \frac{dt}{dx} - 2 \cdot \sqrt{1 + t^2} = 0 \quad / \cdot \frac{dx}{x\sqrt{1 + t^2}}; \quad x \neq 0; \quad \sqrt{1 + t^2} \neq 0$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} - 2 \frac{dx}{x} = 0$$

$$\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2 \frac{dx}{x}$$

Проінтегруємо.

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int 2 \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| = 2 \cdot \ln|x| + C$$

Величину C (довільну сталу) запишемо у вигляді $\ln|C|$.

$$\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| = 2 \cdot \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| = \ln|x|^2 + \ln|C|$$

$$\ln \left| t + \sqrt{1+t^2} \right| = \ln(|x|^2 \cdot |C|)$$

$$\left| t + \sqrt{1+t^2} \right| = |x|^2 \cdot |C|$$

$$t + \sqrt{1+t^2} = x^2 \cdot C$$

Повертаємось до заміни $t = \frac{y}{x}$.

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = x^2 \cdot C \quad / \cdot x$$

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^3 \cdot C$$

$$y = -\sqrt{x^2 + y^2} + x^3 \cdot C \quad \text{— загальний розв'язок}$$

Перевіримо існування особливих розв'язків

1) $x = 0$ — особливий розв'язок

$$2) \sqrt{1 + t^2} = 0$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0$$

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 0 \quad / \cdot x^2$$

$$x^2 + y^2 = 0 \quad \text{— особливий розв'язок}$$

Завдання 4. Розв'язати диференціальне рівняння методом (схемою) Бернуллі

$$4y' + x^3y = y^2e^{-2x}(8 + x^3)$$

За схемою Бернуллі розв'язок даного рівняння шукаємо у вигляді $y = u \cdot v$ (добутку двох довільних функцій).

$$y = uv; \quad y' = u'v + uv'$$

Підставляємо дану заміну у рівняння.

$$4(u'v + uv') + x^3 uv = (uv)^2 \cdot e^{-2x} \cdot (8 + x^3)$$

$$4u'v + 4uv' + x^3 uv = u^2 v^2 \cdot e^{-2x} \cdot (8 + x^3)$$

У лівій стороні рівняння вибираємо доданки з множниками u та виносимо його за дужки.

$$4u'v + u \cdot (4v' + x^3 v) = u^2 v^2 \cdot e^{-2x} \cdot (8 + x^3)$$

Прирівнюємо до нуля множник у дужках:

$$4v' + x^3 v = 0, \text{ отримаємо:}$$

$$4u'v = u^2 v^2 \cdot e^{-2x} \cdot (8 + x^3)$$

1) Розв'яжемо рівняння $4v' + x^3 v = 0$ і знайдемо v .

$$4v' = -x^3 v$$

Запишемо v' у вигляді $\frac{dv}{dx}$.

$$4 \frac{dv}{dx} = -x^3 v$$

– отримали диференціальне рівняння з відокремлюючими змінними

$$4 \frac{dv}{dx} = -x^3 v$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{1}{4} x^3 v \quad / \cdot \frac{dx}{v}; \quad v \neq 0$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{4} x^3 dx$$

Проінтегруємо.

$$\int \frac{dv}{v} = -\frac{1}{4} \int x^3 dx$$

$$\ln v = -\frac{1}{4} \cdot \frac{x^4}{4} + C_1$$

$$\ln v = -\frac{1}{16} x^4 + C_1$$

$$v = e^{-\frac{1}{16}x^4} + C_1$$

Підставимо знайдену довільну функцію v у початкове рівняння:

$$4u'v = u^2 v^2 \cdot e^{-2x} \cdot (8 + x^3)$$

$$4u' e^{-\frac{1}{16}x^4} = u^2 \left(e^{-\frac{1}{16}x^4} \right)^2 \cdot e^{-2x} \cdot (8 + x^3)$$

$$4u' e^{-\frac{1}{16}x^4} = u^2 e^{-\frac{1}{8}x^4} \cdot e^{-2x} \cdot (8 + x^3)$$

$$4u' e^{-\frac{1}{16}x^4} = u^2 e^{-\frac{1}{8}x^4 - 2x} \cdot (8 + x^3)$$

$$4u' = u^2 e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} \cdot (8 + x^3)$$

2) Запишемо u' у вигляді $\frac{du}{dx}$ і розв'яжемо отримане рівняння.

$$4 \frac{du}{dx} = u^2 e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} \cdot (8 + x^3)$$

– отримали диференціальне рівняння з відокремлюючими змінними

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{4} u^2 e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} \cdot (8 + x^3) / \cdot \frac{dx}{u^2}; \quad u^2 \neq 0$$

$$\frac{du}{u^2} = \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} \cdot (8 + x^3) dx$$

Проінтегрувавши отримаємо?

$$-\frac{1}{u} = -e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} + C_2$$

$$u = \frac{1}{-e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} + C_2}$$

Тепер знайдемо загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння підставивши знайдені функції

$$v = e^{-\frac{1}{16}x^4} + C_1 \text{ та } u = \frac{1}{-e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} + C_2} \text{ у рівність } y = u \cdot v.$$

$$\begin{aligned} y &= \left(e^{-\frac{1}{16}x^4} + C_1 \right) \cdot \left(\frac{1}{-e^{-\frac{1}{16}x^4 - 2x} + C_2} \right) = \\ &= \frac{1}{e^{-2x} + C \cdot e^{-\frac{1}{16}x^4}} \end{aligned}$$

$$\text{Відповідь: } y = \frac{1}{e^{-2x} + C \cdot e^{-\frac{1}{16}x^4}} - \text{загальний розв'язок.}$$