

**ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВЕТЕРИНАРНОЇ
МЕДИЦИНИ ТА БІОТЕХНОЛОГІЙ ІМЕНІ С.З. ГЖИЦЬКОГО**

Олена Мусієнко

**МЕТРОЛОГІЧНИЙ КОНТРОЛЬ
У ФІЗИЧНОМУ ВИХОВАННІ
Частина I. Основні статистичні показники**

Методичні матеріали для підготовки до практичних занять та
самостійної роботи здобувачів першого (бакалаврського) рівня
вищої освіти спеціальності

017 Фізична культура і спорт

**Львів
2022**

УДК 37.037(07)

Автор: **Мусієнко О. В.** – кандидат біологічних наук, доцент кафедри фізичного виховання, спорту і здоров'я ЛНУВМБ імені С. З. Гжицького

Рецензент: **Сеньків В.М.** – кандидат технічних наук, доцент кафедри медико-біологічних дисциплін, географії та екології Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка

Мусієнко О.В. Метрологічний контроль у фізичному вихованні. Методичні матеріали для підготовки до практичних занять та самостійної роботи для здобувачів вищої освіти за спеціальністю 017 Фізична культура. Львів, 2022. 115 с.

Методичні рекомендації укладено відповідно до програми навчальної дисципліни «Метрологічний контроль у фізичному вихованні» для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти зі спеціальності 017 «Фізична культура і спорт» у закладах вищої освіти III-IV рівня акредитації Міністерства освіти і науки України (Львів, 2022).

Запропоноване видання містить тематику практичних занять, методичні вказівки до кожного заняття, довідково-інформаційні дані. Використання зазначеного матеріалу сприятиме якісній підготовці студентів до практичних занять. Розглянуто і рекомендовано до друку навчально-методичною радою факультету громадського розвитку та здоров'я Львівського національного університету ветеринарної медицини та біотехнологій імені С. З. Гжицького (протокол № 3 від 16 листопада 2022 р.).

ЗМІСТ

ВСТУП.....	4...
Основи теорії спортивних вимірювань.....	5
Метод середніх величин	12
Вибірковий метод	26
Параметричні та непараметричні методи порівняння вибірок	45
Взаємозв'язок результатів вимірювань	52
Основи теорії спортивних тестів.....	71
Основи теорії оцінок. Шкали оцінок спортивних результатів.....	81.
Кількісна оцінка якісних показників.....	96
Додаток	109

ВСТУП

На сучасному етапі у практиці фізичного виховання здійснюється багато кількісних та якісних вимірювань. Перед фахівцями галузі постають завдання з організації і проведення різноманітних досліджень, а також опрацювання й інтерпретації фактичного експериментального матеріалу, отриманого експериментальним шляхом. Виконання вказаних завдань зумовлює потребу забезпечення високого рівня необхідної компетенції студентів – майбутніх фахівців галузі фізичного виховання шляхом вивчення навчальної дисципліни «Метрологічний контроль у фізичному вихованні».

Однією з ефективних форм організації навчально-виховної роботи у вищих навчальних закладах, що сприяють поглибленню і закріпленню знань студентів, формують вміння і навички, необхідні для метрологічного контролю у галузі фізичної культури, є практичні заняття

Навчальний посібник укладено відповідно до програми навчальної дисципліни «Метрологічний контроль у фізичному вихованні» для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «Бакалавр» напряму підготовки 017 Фізична культура і спорт. Посібник містить тематику практичних занять, методичні вказівки до кожного заняття, довідково-інформаційні дані.

До кожного заняття подано короткий виклад теоретичного матеріалу, наведено приклади розв'язання типових задач і вправ. Окрім того, подано задачі і вправи для аудиторної та домашньої роботи, питання для самоконтролю.

Значне інформаційне навантаження подано у додатках, які містять велику кількість статистичних та нормативних даних, необхідних для раціональної і безпечної організації та здійснення процесу фізичного виховання в навчальних закладах.

1. Основи теорії спортивних вимірювань

Теоретичні відомості

Вимірюванням називають встановлення відповідності між досліджуваними явищами, з одного боку, і числами, з іншого.

Щоб результати різних вимірювань можна було порівнювати один з одним, вони повинні бути виражені в одних і тих самих одиницях. У 1961 р. на Міжнародній генеральній конференції з мір і ваг була прийнята Міжнародна система одиниць, що одержала скорочену назву СІ.

СІ включає сім незалежних одна від одної основних одиниць, з яких як похідні виводять одиниці інших фізичних величин. Похідні одиниці визначаються на основі формул, що пов'язують між собою фізичні величини.

Наприклад, одиниця довжини (метр) і одиниця часу (секунда) – основні одиниці, а одиниця швидкості (метр за секунду [м/с]) – похідна. Сукупність вибраних основних і утворених з їхньою допомогою похідних одиниць для однієї або декількох галузей вимірювань називається системою одиниць (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Основні одиниці СІ

Величина	Розмірність	Одиниця		
		Назва	Позначення	
			українське	міжнародне
Довжина	L	Метр	м	m
Маса	M	Кілограм	кг	kg
Час	T	Секунда	с	S
Сила струму	I	Ампер	A	A
Температура	q	Кельвін	K	K
Кількість речовини	N	Моль	моль	mol
Сила світла	G	Кандела	Кд	cd

Для утворення кратних і часткових одиниць повинні використовуватися спеціальні приставки (табл. 1.2).

Таблиця 1.2

Множники і приставки

Множники	Приставка	
1 000 000= 10^6	Мега	М
1 000= 10^3	Кіло	к
100= 10^2	Гекто	Г
10= 10^1	Дека	Д
0,1= 10^{-1}	деци	d
0,01= 10^{-2}	санти	с
0,001= 10^{-3}	мілі	m
0,000 001= 10^{-6}	мікро	μ

Усі похідні величини мають свої розмірності.

Розмірністю називається вираз, що пов'язує похідну величину з основними величинами системи при коефіцієнті пропорційності, рівному одиниці. Наприклад, розмірність швидкості дорівнює $[V]=L/T=L \cdot T^{-1}$, а розмірність прискорення – $[a]=L \cdot T^{-2}$.

Ніяке вимірювання не може бути виконане абсолютно точно. Результат вимірювання неминуче містить похибку, величина якої тим менша, чим точніший метод вимірювань і вимірювальний прилад.

Основна похибка – це похибка методу вимірювання або вимірювального приладу, що має місце в нормальних умовах їхнього застосування.

Додаткова похибка – це похибка вимірювального приладу, зумовлена відхиленням умов його роботи від нормальних.

Величина $\Delta A = A - A_0$ рівна різниці між показанням вимірювального приладу (A) й істинним значенням вимірюваної величини (A_0), називається *абсолютною похибкою* вимірювання. Вона вимірюється у тих самих одиницях, що і сама вимірювана величина.

Відносна похибка – це відношення абсолютної похибки до значення вимірюваної величини.

Відносна похибка є двох видів:

$$\begin{array}{ll} \text{дійсна} & \delta_D = \frac{|\Delta A|}{A_0} \cdot 100\%; \\ \text{приведена} & \delta_{\Pi} = \frac{|\Delta A|}{A_{\max}} \cdot 100\%. \end{array}$$

Виражаються ці величини у відсотках, $\delta_D \geq 0$, $\delta_{\Pi} \geq 0$.

У тих випадках, коли оцінюється не похибка вимірювань, а похибка вимірювального приладу, за максимальне значення вимірюваної величини приймають граничне значення шкали приладу. У такому розумінні найбільше допустиме значення ΔA , виражене у відсотках, визначає в нормальних умовах роботи клас точності вимірювального приладу.

Систематичною називається похибка, величина якої не змінюється від вимірювання до вимірювання. Через цю особливість систематична похибка часто може бути передбачена заздалегідь або в крайньому випадку виявлена й усунута після закінчення процесу вимірювань.

Таруванням (від нім. *tarieren*) називається перевірка показів вимірювальних приладів шляхом порівняння з показаннями зразкових значень мір (еталонів*) у всьому діапазоні можливих значень вимірюваної величини.

Калібруванням називається визначення похибок або поправка для сукупності мір (наприклад, набору динамометрів). І при таруванні, і при калібруванні до входу вимірювальної системи замість спортсмена підключається джерело еталонного сигналу відомої величини. Наприклад, таруючи установку для вимірювання зусиль, на тензометричній платформі за чергою поміщають вантажі масою 10, 20, 30 та ін. кілограмів.

Рандомізацією (від англ. *random* – випадковий) називається перетворення систематичної похибки на випадкову. Цей прийом спрямований на усунення невідомих систематичних похибок. За методом рандомізації вимірювання досліджуваної величини здійснюється кілька разів. При цьому вимірювання організують так, щоб постійний фактор, що впливає на їхній результат, діяв у кожному випадку по-різному. Так, при дослідженні фізичної працездатності можна рекомендувати вимірювати її багаторазово, кожного разу

змінюючи спосіб завдання навантаження. Після закінченні усіх вимірювань їхні результати усереднюються за правилами математичної статистики.

Випадкові похибки виникають під дією різноманітних факторів, які неможливо передбачити заздалегідь, а також точно врахувати.

Стандарт – нормативно-технічний документ, що встановлює комплекс норм, правил, вимог до об'єкта стандартизації і затверджений компетентним органом – Державним комітетом зі стандартизації. У спортивній метрології та метрологічному контролі об'єктом стандартизації є спортивні вимірювання.

Для здійснення процесу вимірювання обов'язковою є наявність шкали. *Шкала* – це вибраний певним чином спосіб встановлення відповідності між числами і характеристиками об'єктів. У спортивних вимірюваннях здебільшого використовують чотири типи шкал:

- найменувань (номінальна);
- порядку;
- інтервалів;
- відношень.

Шкала найменувань (номінальна шкала) – найпростіша. У ній числа виконують роль ярликів і служать для виявлення та ідентифікації досліджуваних об'єктів (наприклад, нумерація гравців футбольної команди). Числа, що складають шкалу найменувань, дозволяється змінювати місцями. У цій шкалі немає відношень типу "більше – менше", тому дехто вважає, що застосування шкали найменувань не варто вважати вимірюванням. При використанні шкали найменувань проводяться тільки окремі математичні операції. Наприклад, її числа не можна додавати і віднімати, але можна підраховувати, скільки разів (як часто) зустрічається те або те число.

Шкала порядку. Є види спорту, де результат спортсмена визначається тільки місцем, зайнятим на змаганнях (наприклад, єдиноборства). Після таких змагань очевидно, хто зі спортсменів сильніший, а хто слабший. Але наскільки сильніший або слабший, сказати не можна. Якщо три спортсмени зайняли відповідно перші, другі і треті місця, то які їхні відмінності в спортивній майстерності, залишається незрозумілим: другий спортсмен може бути майже рівний першому, а може бути істотно слабшим від нього і бути майже однаковим із третім. Місця, зайняті в шкалі порядку, називаються рангами, а сама шкала називається ранговою або не метричною. У такій шкалі складові її числа упорядковані за рангами (тобто

займаними місцями), але інтервали між ними точно вимірити не можна. На відміну від шкали найменувань, шкала порядку дозволяє не тільки установити факт рівності або нерівності вимірюваних об'єктів, але і визначити характер нерівності у виді суджень: "більше – менше", "краще – гірше" та ін..

За допомогою шкал порядку можна вимірювати якісні показники, які не мають строгої кількісної міри. Особливо широко ці шкали використовуються у гуманітарних науках: педагогіці, психології, соціології. До рангів шкали порядку можна застосовувати більше число математичних операцій, ніж до чисел шкали найменувань.

Шкала інтервалів – така шкала, у якій числа не тільки впорядковані за рангами, але і розділені визначеними інтервалами. Особливість, що відрізняє її від описуваної далі шкали відношень, полягає у тому, що нульова точка вибирається довільно. Прикладами можуть бути календарний час (початок літочислення в різних календарях установлювалося за певними причинами), суглобовий кут (кут у ліктьовому суглобі при повному розгинанні передпліччя може прийматися рівним або нулеві, або 180°), температура, потенціальна енергія піднятого вантажу, потенціал електричного поля та тощо.

Результати вимірювань за шкалою інтервалів можна обробляти всіма математичними методами, окрім обчислення відношень. Дані шкали інтервалів дають відповідь на запитання "на скільки більше?", але не дозволяють стверджувати, що одне значення обмірюваної величини в скільки то разів більше або менше від іншого. Наприклад, якщо температура підвищилася з 10° до 20° за Цельсієм, то не можна сказати, що стало вдвічі тепліше.

Шкала відношень. Ця шкала відрізняється від шкали інтервалів тільки тим, що в ній строго визначене положення нульової точки. Завдяки цьому шкала відношень не накладає ніяких обмежень на математичний апарат, використовуваний для обробки результатів спостережень.

У спорті за шкалою відношень вимірюють відстань, силу, швидкість і десятки інших перемінних, а також величини, що утворюються як різниці чисел, визначених за шкалою інтервалів. Так, календарний час відраховується за шкалою інтервалів, а інтервали часу – за шкалою відношень.

При використанні шкали відношень (і тільки в цьому випадку!) вимірювання якої-небудь величини зводиться до експериментального

визначення відношення цієї величини до іншої подібної, прийнятої за одиницю. Вимірюючи довжину стрибка, ми довідуємося, у скільки разів ця довжина більша від довжини іншого тіла, прийнятого за одиницю довжини (метрової лінійки в окремому випадку); зважуючи штангу, визначаємо відношення її маси до маси іншого тіла – одиничної гирі "кілограма" тощо. Якщо обмежитися тільки застосуванням шкал відношень, то можна дати інше (більш вузьке, часткове) визначення вимірювання: вимірити яку-небудь величину – значить знайти експериментальним шляхом її відношення до відповідної одиниці виміру.

У таблиці 1.3 наведені зведені дані про шкали вимірювань.

Таблиця 1.3

Шкали вимірювань

Шкала	Основні операції	Допустимі математичні процедури	Приклади
Найменувань	Встановлення рівності	Число випадків Мода Кореляція випадкових подій (тетра- і поліхоричні коефіцієнти кореляції)	Нумерація спортсменів у команді Результати жеребкування
Порядку	Встановлення співвідношень "більше" або "менше"	Медіана Рангова кореляція Рангові критерії Перевірка гіпотез непараметричною статистикою	Місце, зайняте на змаганнях Результати ранжування спортсменів групою експертів
Інтервалів	Встановлення рівності інтервалів	Всі методи статистики окрім визначення відношень	Календарні дати (час) Суглобовий кут Температура тіла
Відношень	Встановлення рівності відношень	Всі методи статистики	Довжина, сила, маса, швидкість і ін.

Розв'язування типових задач і вправ

Приклад 1.1. Знайти точне значення станової сили, якщо показник станового динамометра дорівнює $F=140$ Н, абсолютна похибка складає $\Delta F = \pm 3$ Н.

Розв'язування:

$$\begin{aligned} F - \Delta F &< F_0 < F + \Delta F; \\ 140 - 3 &< F_0 < 140 + 3; \\ 137 &< F_0 < 143. \end{aligned}$$

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 1.1. Визначити, що виміряно точніше пальпаторним методом: пульс спокою за 1 хв ($P_1=72$ уд.) або за 10 с ($P_2=11$ уд.), якщо абсолютна похибка вимірювання $\Delta P = \pm 1$ уд.

№ 1.2. Визначити точне значення показника станової сили в досліджуваного, якщо максимальне значення шкали станового динамометра $F_{max}=4500$ Н, клас точності приладу КТП=1,5%, а показаний результат $F=2100$ Н.

№ 1.3. Рандомізувати показники своєї частоти серцевих скорочень у спокої, виміливши її тричі за 15 с.

Контрольні питання

1. Предмет і завдання метрологічного контролю у фізичному вихованні.
2. Поняття про вимірювання і одиниці вимірювання.
3. Шкали вимірювань.
4. Основні, додаткові, похідні одиниці СІ.
5. Розмірність похідних величин.
6. Поняття про точність вимірювань і похибки.
7. Види похибок (абсолютна, відносна, систематична і випадкова).
8. Поняття про клас точності приладу, тарування, калібрування і рандомізацію.

2. Метод середніх величин

Теоретичні відомості

Під час досліджень у галузі фізичної культури і спорту вивчають повні ознаки, які притаманні великій кількості людей, масові вимірювання однорідних об'єктів, що мають спільні якості, володіють певними закономірностями. Саме через існування цих закономірностей дослідник обирає лише частину групи. Отримавши певні результати, перевіряють їх достовірність і потім поширюють на всю сукупність людей, яким властива ця ознака.

Уся велика досліджувана сукупність об'єктів із певною ознакою, яка підлягає вивченню, називається *генеральною*.

Вибірковою сукупністю називають лише ту частину з генеральної, яка бере участь в експерименті. Іноді її називають *вибіркою*. Якщо дослідженням охоплена вся генеральна сукупність, то воно є суцільним, а коли лише певна вибірка – вибіркоvim. Кожна вибірка характеризується *об'ємом* n – це число об'єктів дослідження. Якщо вибірка представляє генеральну сукупність відповідно до вимог математичної статистики то вона є *репрезентативною*.

Репрезентативність вибірки забезпечується виконанням таких умов:

- 1) об'єкти мають добиратися випадково;
- 2) має бути достатній об'єм.

Для випадкового відбору об'єкти дослідження можна добирати за допомогою жеребкування, таблиці випадкових чисел (*Додаток 1, табл. Д.1.1*), механічного відбору, типового і серійного відборів.

Одним із найбільш вживаних методів статистики є *метод середніх величин*.

Цей метод складається із трьох основних етапів:

- утворення варіаційного ряду;
- обчислення характеристик варіаційного ряду;
- практичної реалізації отриманих характеристик.

Розглянемо як здійснюється обробка і аналіз вибірки та будуються одномірні ряди.

Нехай x_i – значення вимірюваної величини для i -го учасника обстеження, n_i – кількість об'єктів, у яких зафіксовано величину x_i , $i=1,2,3...k$ – кількість варіантів.

Числові значення досліджуваної величини x_i називаються *варіантами*, а кількість повторень того чи іншого варіанту n_i – *частотою*.

Якщо при статистичній обробці сукупності немає значення послідовності запису даних, то зручніше розташувати ці дані (варіанти) відповідно до їх значення за збільшенням, або – за зменшенням. Цей процес називається ранжуванням, а місце кожної варіанти у ранжованому ряді називається рангом.

Варіаційний ряд – це ранжований ряд чисел, в якому кожному варіанту x відповідає певна частота повторення n .

Ряд, у якому дискретному значенню варіанти відповідає фіксоване значення частоти, називається *дискретним* або *безінтервальним*, оскільки складається з дискретних чисел. Такі ряди можуть утворювати кількість віджимань, підтягувань і т.д.

Окрім дискретних, є ще й *інтервальні* варіаційні ряди, складені з чисел, що містять певні інтервали: час, швидкість, маса, ріст, або дискретна величина змінюється у великих межах.

Щоб побудувати інтервальний варіаційний ряд, слід визначити кількість інтервалів (груп) і обчислити ширину кожного інтервалу.

Кількість інтервалів встановлюється за допомогою таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Залежність кількості інтервалів від об'єму вибірки

Об'єм вибірки, n	Число інтервалів, k
25 – 40	5 – 6
40 – 60	6 – 8
60 – 100	7 – 10
100 – 200	8 – 12
понад 200	10 – 15
10 – 20	4

Ширина інтервалів визначається за формулою:

$$h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{k},$$

де $X_{\max}$ – найбільший варіант;

$X_{\min}$ – найменший варіант;

k – кількість інтервалів.

Нижню межу першого інтервалу визначають так:

$$X_H = X_{\min} - \frac{h}{2}$$

X_i – знаходять як середнє значення інтервалу:

$$X_{B1} = X_{H1} + h; \quad X_{B1} = X_{H2} \quad \text{і т.д.}$$

Коли значення варіанта лежить на межі інтервалу, то верхню межу інтервалу зменшують на величину, рівну точності вимірювання.

Основні статистичні характеристики варіаційного ряду оцінюють центральну тенденцію вибірки коливальність, або варіацію.

Центральну тенденцію вибірки дозволяють оцінити такі статистичні характеристики, як середнє арифметичне значення, мода, медіана.

Середнє арифметичне значення – характеризує середній рівень досліджуваної ознаки в групі об'єктів і обчислюється за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

Для дискретного варіаційного ряду:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i x_i}{\sum_{i=1}^k n_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i,$$

де k – число інтервалів.

Моду (позначається M_o) називають результат вибірки, який зустрічається найчастіше.

Медіана (Me) – результат вимірювання, розміщений посередині ранжованого ряду:

$$Me = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}.$$

Моду і медіану використовують для оцінки середнього значення під час вимірювань у шкалі порядку (рис. 2.1).

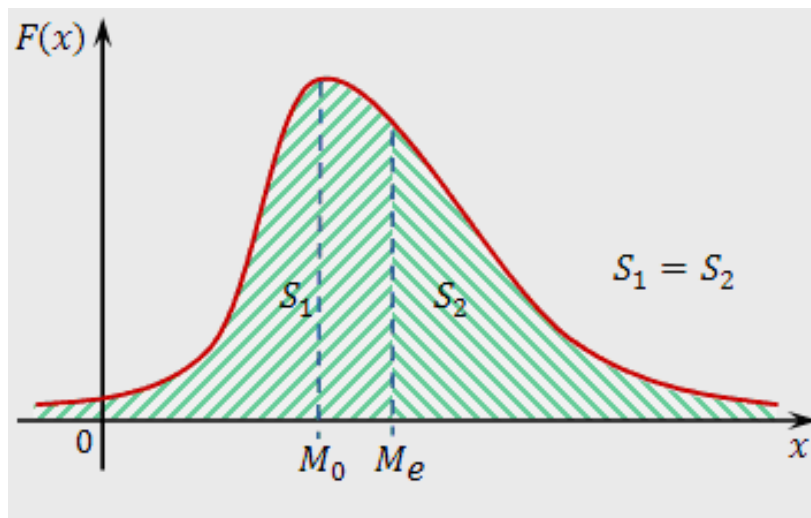


Рис. 2.1. Графічне представлення моди і медіани

До характеристик *коливальності* ряду відносять: розмах, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт варіації.

Розмах – це різниця між крайніми значеннями величин варіаційного ряду:

$$R = X_{\max} - X_{\min}.$$

Характеристики коливальності доповнюють інформацію про щільність результатів. Може бути дві вибірки з однаковим середнім значення, але з різною щільністю. Тому слід використовувати дисперсію та інші характеристики.

Дисперсія характеризує розсіювання квадратів відхилень варіантів (значень) навколо середнього арифметичного і обчислюється за формулами:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}, \text{ коли } n > 30;$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}, \text{ коли } n \leq 30.$$

Для обчислення середнього арифметичного також може використовуватися такий вираз:

$$\sigma^2 = x^2 - (\bar{x})^2.$$

Вказана величина (дисперсія) використовується у дисперсійному аналізі, а в *методі середніх величин* вона має проміжне значення.

Середнє квадратичне відхилення, або *стандартне відхилення* є показником розсіювання варіантів (значень) відносно їх середнього значення:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}}, \text{ коли } n > 30;$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n-1}}, \text{ коли } n \leq 30.$$

Середнє квадратичне відхилення має такі самі одиниці вимірювання, що і вимірювана величина.

Тоді вибірка може достатньо повно характеризуватися виразом:

$$x = \bar{x} \pm \sigma.$$

Але ця величина не годиться для порівняння двох чи більше сукупностей, що мають різні одиниці вимірювання.

Для такого порівняння використовують коефіцієнт варіації.

Коефіцієнт варіації показує у відсотках, яку частину від середнього арифметичного становить стандартне відхилення:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\%,$$

де $V=0-10\%$ – коливальність результатів невелика;

$V=11-20\%$ – середня;

$V>20\%$ – велика.

Розв’язання типових задач і вправ

Приклад 2.1. Застосування таблиці випадкових чисел.

Відомо, що на І-го курсі певного факультету навчається 110 студентів. Для дослідження необхідно сформувати експериментальну групу із 26 осіб. Як здійснити формування групи?

Розв’язування

1. Сформуємо список студентів у алфавітному порядку і пронумеруємо їх від 1 до 110.

2. Вихідною точкою таблиці випадкових чисел (*табл. Д 1.1*) візьмемо число 8921 (3 колонка, 11 рядок зверху).

3. Отримуємо ряд чисел:

8921 6457 8361 9849 9902 4244 2377 9213 4625 5978 5266 ...

4. Оскільки загальна кількість студентів – тризначне число, то розбиваємо цю послідовність на групи із трьох цифр:

892, 164, 578, 361, 984, 999, 024, 244, 237, 792, 462, 559, 785, 266,
752, 184, 886, 854, 920, 325, 982, 673, 239, 951, 124, 318, 500, 335,
326, 430, 567, 950, 412, 108, ...

5. Відкидаємо перші 6 чисел, оскільки вони більші від 110.

021 – сьоме число. Приймаємо його, оскільки воно менше від 110, не дорівнює нулю, і елемент з цим номером не був вибраний попередньо. Таким чином, студент під номером 21 увійде у вибірку.

Діючи так само надалі, даліше, знаходимо 25 інших студентів, які увійдуть у вибірку.

Приклад 2.2. Під час обстеження студенток III курсу технічного вузу були отримані такі значення відновленого пульсу:

66 72 75 63 74 60 72 63 72 72 68 66 72 72 74 68 75 68 76
68 74 81 66 66 72 74 68 68 74 63 75 76 75 72 76.

Побудувати варіаційний ряд і обчислити його статистичні характеристики.

Розв'язування

Нехай x_i – значення пульсу для i -ї учасниці обстеження, n_i – кількість студенток, що мали пульс x_i , i – кількість варіантів.

Ранжуємо та утворюємо варіаційний ряд. Він може розташовуватися вертикально чи горизонтально.

x_i	60	63	66	68	72	74	75	76	81	
n	1	3	4	6	8	5	4	3	1	$n=35$

Знаходимо основні статистичні характеристики варіаційного ряду.

Середнє арифметичне значення:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^9 x_i n_i}{n} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_9 n_9}{n} =$$

$$= \frac{60 \cdot 1 + 63 \cdot 3 + 66 \cdot 4 + 68 \cdot 6 + 72 \cdot 8 + 74 \cdot 5 + 75 \cdot 4 + 76 \cdot 3 + 81 \cdot 1}{35} = \frac{2476}{35} = 70,7(\text{y.d.}).$$

$$\text{Медіана: } Me = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} = \frac{60 + 81}{2} = 70,5(\text{y.d.}).$$

$$\text{Мода: } Mo = 72(\text{y.d.}).$$

$$\text{Розмах: } R = x_{\max} - x_{\min} = 81 - 60 = 21(\text{y.d.}).$$

Дисперсія:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 n_2 + \dots + (x_9 - \bar{x})^2 n_9}{n} = \\ &= \frac{(61 - 70,7)^2 \cdot 1 + (63 - 70,7)^2 \cdot 3 + (66 - 70,7)^2 \cdot 4 + (68 - 70,7)^2 \cdot 6 + (72 - 70,7)^2 \cdot 8}{35} + \\ &+ \frac{(74 - 70,7)^2 \cdot 5 + (75 - 70,7)^2 \cdot 4 + (76 - 70,7)^2 \cdot 3 + (81 - 70,7)^2 \cdot 1}{35} = 423,14(\text{yd}^2).\end{aligned}$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^9 (x_i - \bar{x})^2 n_i}{n}} = \sqrt{423,14} \approx 20,6(\text{yd}).$$

Коефіцієнт варіації:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{20,6}{70,7} \cdot 100\% = 29\%.$$

Приклад 2.3. Результати вису на зігнутих руках дівчат 9 років:

2 3 9 24 12 14 3 22 16 6 6 8 13 14 9 30 20 15 12 12 14
13 14 8 6 5 2 3 2 3 9 24 12 14 3 22 6 16 8 6 14 13 30
28 9 16 12 13 14 14 13 6 8 2 5 3.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його статистичні характеристики.

Розв'язування

$$\begin{aligned}x_{\min} &= 2; \quad x_{\max} = 30; \quad n = 56; \quad k = 6-8, \text{ тому} \\ h &= \frac{30 - 2}{k} = \frac{28}{7} = 4. \quad X_H = 2 - \frac{h}{2} = 2 - \frac{4}{2} = 0.\end{aligned}$$

Будуємо таблицю:

Номер інтервалу	Межі інтервалу	Середнє значення, $\bar{x}$	Частота, n	Накопичення частоти
1	0 – 4	2	10	10
2	4 – 8(-1)	6	8	18
3	8 – 12(-1)	10	8	26
4	12 – 16(-1)	14	19	45
5	16 – 20(-1)	18	3	48
6	20 – 24(-1)	22	3	51
7	24 – 30	27	5	56

x_i – знаходять як середнє значення інтервалу:

$x_{B1}=x_{H1}+h$; $x_{B1}=x_{H2}$ і т.д.

Коли значення варіанта припадає на межу інтервалу, то верхню межу інтервалу зменшують на величину, що рівна точності вимірювання. Тоді інтервальний ряд має такий вигляд:

x_i	2	6	10	14	18	22	27	
n_i	10	8	8	19	3	3	5	$n=56$

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 2.1. Користуючись таблицею випадкових чисел сформувати вибірку із 20 осіб, якщо загальна кількість – 72.

№ 2.2. Для проведення контрольних заходів необхідно обрати 8 студентських груп із 24. Користуючись таблицею випадкових чисел, сформувати вибірку для контролю.

№ 2.3. Результати стрибка з місця є показником вибухової сили м'язів нижніх кінцівок. Впорядкувати дані тесту, проведеного з дітьми семи років ($n=20$):

115 104 102 112 84 92 104 88 118 84 102 112 115 92 88
102 112 115 104 115.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.4. Унаслідок антропометричних вимірювань отримано результат маси тіла учнів 5 класу:

22 25 34 32 38 42 24 23 27 30 34 30 31 36 37 24 29 35
29 39.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.4. Індекс Руф'є – один із показників оцінки фізичного здоров'я людини, який характеризує фізичну працездатність і стан серцево-судинної системи. Впорядкувати дані тесту, проведеного з дітьми 10-ти років ($n=20$):

17 19 14 23 20 21 27 31 32 27 20 23 19 25 27 23
19 25 17 25.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.6. Човниковий біг 4х9 м використовують для оцінювання комплексного прояву спритності, швидкості та швидкої і вибухової сили м'язів нижніх кінцівок дітей та підлітків. Впорядкувати дані тесту, проведеного з юнаками 15-ти років ($n=20$):

10,8 10,2 9,6 9,9 9,7 9,6 10,0 10,2 10,1 10,3 9,8 10,4 10,3
10,0 10,1 10,7 10,0 10,2 9,9 9,7.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.7. За допомогою показників станової динамометрії (в кг) прийнято визначати рівень прояву сумарної сили людини. Впорядкувати дані тесту, проведеного зі студентами I курсу технічного вузу ($n=20$):

49 71 86 71 49 119 97 63 97 86 71 63 71 63 49 60
63 49 119 97.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.8. Під час тестування рівня фізичної підготовленості дівчатка 9-ти років виконували вис на зігнутих руках ($n=20$):

3 5 2 8 6 13 14 14 13 12 16 28 30 13 14 6 8 16
22 24.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.9. Результати стрибка з місця є показником вибухової сили м'язів нижніх кінцівок. Впорядкувати дані тесту, проведеного з дітьми 7-ми років ($n=20$):

114 105 103 111 85 91 105 89 119 85 103 114 112 91 89
105 114 111 105 114.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.10. Внаслідок антропометричних вимірювань отримано результат маси тіла учнів п'ятого класу:

23 26 35 344 39 41 26 24 28 31 35 31 30 37 36 23 29 35
30 39.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.11. Індекс Руф'є – один із показників оцінки фізичного здоров'я людини, який характеризує фізичну працездатність і стан серцево-судинної системи. Впорядкувати дані тесту, проведеного з дітьми 10-ти років ($n=20$):

16 20 14 23 21 22 28 32 32 26 20 22 20 25 28 22
20 26 14 233.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.12. Човниковий біг 4x9 м використовують для оцінювання комплексного прояву спритності, швидкості та швидкої і вибухової сили м'язів нижніх кінцівок дітей та підлітків. Впорядкувати дані тесту, проведеного з юнаками 15-ти років ($n=20$):

10,9 10,3 9,5 9,8 9,8 9,6 10,1 10,3 10,1 10,3 9,8 10,4 10,3
10,0 10,1 10,9 10,0 10,3 9,9 9,6.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.13. За допомогою показників станової динамометрії (в кг) прийнято визначати рівень прояву сумарної сили людини. Впорядкувати дані тесту, проведеного з студентами I курсу технічного вузу ($n=20$):

50 72 87 72 50 120 98 63 98 86 71 63 71 63 50 60
63 50 120 98.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.14. Під час тестування рівня фізичної підготовленості дівчатка дев'яти років виконували вис на зігнутих руках ($n=20$):

7 5 2 8 3 13 14 14 13 12 16 28 30 13 14 7 8 16
22 24.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.15. Результати стрибка з місця є показником вибухової сили м'язів нижніх кінцівок. Впорядкувати дані тесту, проведеного з дітьми семи років ($n=20$):

108 112 82 104 84 92 104 88 118 84 102 112 115 92 88
102 112 115 104 112.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.16. Внаслідок антропометричних вимірювань отримано результат маси тіла учнів 5 класу:

24 25 30 29 38 42 24 23 27 30 34 30 31 36 37 24 29 35
27 39.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.17. Індекс Руф'є – один із показників оцінки фізичного здоров'я людини, який характеризує фізичну працездатність і стан серцево-судинної системи. Впорядкувати дані тесту, проведеного з дітьми 10-ти років ($n=20$):

18 23 14 27 20 21 27 31 32 27 20 23 19 25 27 23
19 25 17 23.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.18. Човниковий біг 4x9 м використовують для оцінювання комплексного прояву спритності, швидкості та швидкої і вибухової сили м'язів нижніх кінцівок дітей та підлітків. Впорядкувати дані тесту, проведеного з юнаками п'ятнадцяти років ($n=20$):

10,4 10,6 9,6 9,9 9,7 9,6 10,0 10,2 10,1 10,3 9,8 10,4 10,3
10,0 10,4 10,7 10,0 10,2 9,9 9,6.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2.19. За допомогою показників станової динамометрії (в кг) прийнято визначати рівень прояву сумарної сили людини. Впорядкувати дані тесту, проведеного з студентами першого курсу технічного ВНЗ ($n=20$):

52 74 86 71 49 119 97 63 97 86 71 63 74 63 52 60
63 52 119 97.

Побудувати дискретний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

№ 2. 20. Під час тестування рівня фізичної підготовленості дівчатка дев'яти років виконували вис на зігнутих руках ($n=20$):

9 12 2 8 7 13 14 18 13 12 16 28 30 13 14 6 18
16 27 28.

Побудувати інтервальний варіаційний ряд і обчислити його основні показники $\bar{X}$, σ^2 , σ , V .

Контрольні питання

1. Що називається генеральною сукупністю?
2. Що називається вибірковою сукупністю?
3. Що таке об'єм вибірки?
4. Що таке репрезентативність вибірки?
5. У чому суть методу середніх величин?
6. Дати визначення варіаційного ряду.
7. Що таке ранжування?
8. Що таке ранг?
9. Назвати основні характеристики варіаційного ряду.

3. Вибірковий метод

Теоретичні відомості

Предмет дослідження у більшості випадків передбачає вивчення вибірки достатньо великого об'єму генеральної сукупності. Але, оскільки практично обстежити всю генеральну сукупність неможливо, то часто використовують вибірковий метод.

Вибірковий метод – один із основних методів спортивної статистики, який передбачає вивчення властивостей вибіркової сукупності з метою подальшого їх узагальнення на всю генеральну сукупність.

Після того, як визначена вибірка і стали відомі її статистичні дані (варіанти, дати, елементи і так далі), виникає необхідність представити ці дані в зручному для розв'язання завдання вигляді. На практиці використовують багато різних видів представлення статистичних даних. Найчастіше вживають такі:

- а) текстовий вид;
- б) табличний вид;
- в) варіаційний ряд;
- г) графічний вид.

Значення варіаційних рядів можна представляти не тільки у табличному, але й у графічному виді.

Полігон розподілу – це залежність частоти n від значення величини X (рис. 3.1).

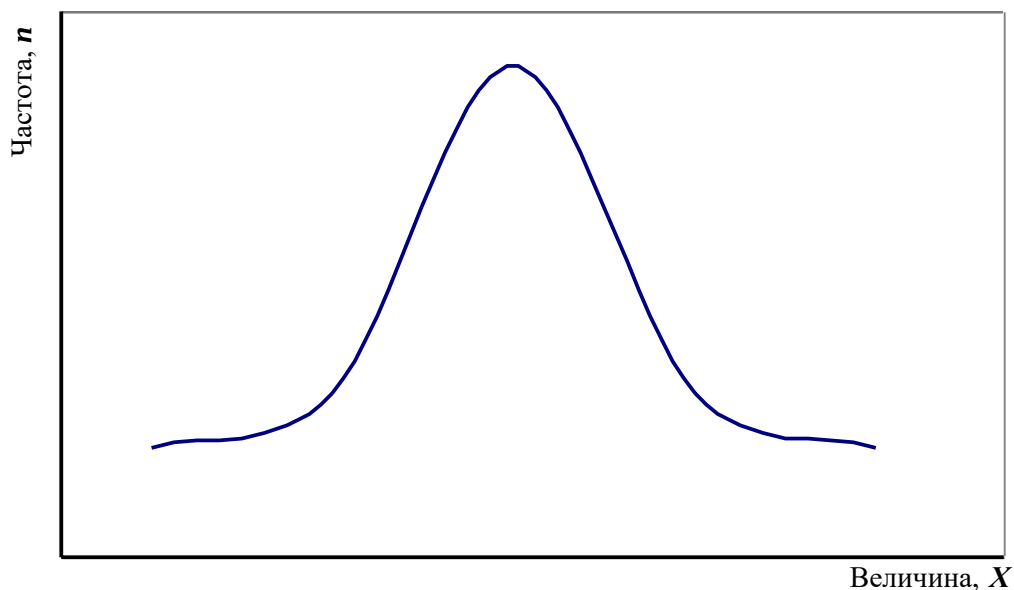


Рис. 3.1. Полігон розподілу

Гістограма розподілу – залежність частоти n від інтервалів значень величини X (рис. 3.2).

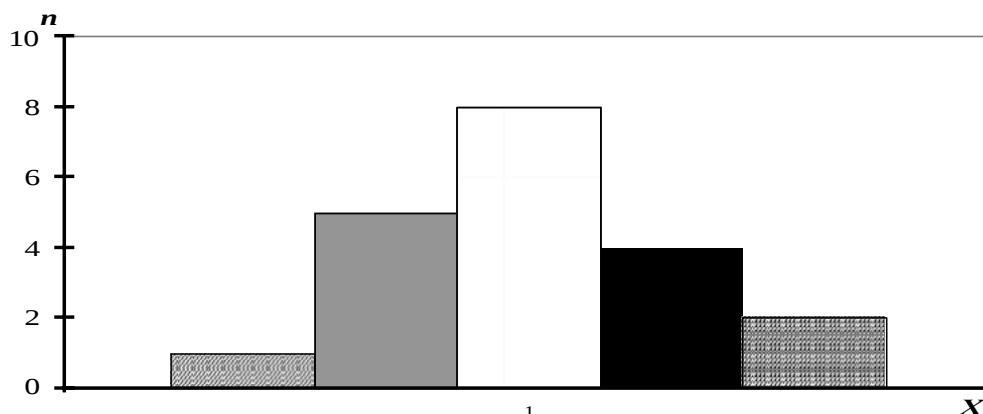


Рис. 3.2. Гістограма розподілу

При аналізі розподілу результатів вимірювань завжди роблять припущення про розподіл, який мала б вибірка, якби число вимірів було дуже великим. Такий розподіл (дуже великої вибірки) називають розподілом генеральної сукупності або теоретичним, а розподіл експериментального ряду вимірювань – емпіричним.

Теоретичний розподіл більшості результатів вимірювань описується формулою нормального розподілу, яка уперше була встановлена англійським математиком Муавром у 1733 р. :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{X})^2}{2\cdot\sigma^2}},$$

де: π і e – математичні постійні ($\pi = 3,14$, $e = 2,718$);

$\bar{X}$ і σ – відповідно середнє арифметичне і середнє квадратичне відхилення;

x – результати вимірювань;

$f(x)$ – функція густини розподілу.

Цей математичний вираз розподілу дає змогу отримати у вигляді графіка криву нормального розподілу (рис. 3.3), яка симетрична відносно центру групування (зазвичай це значення моди або медіани). Ця крива може бути отримана з полігону розподілу при нескінченно великому числі спостережень та інтервалів. Вся площа фігури під кривою дорівнює одиниці.

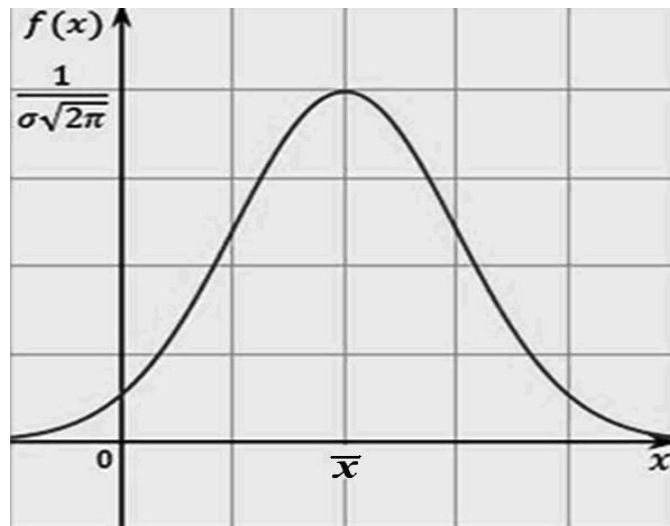


Рис. 3.3. Крива нормального розподілу

Нормальний розподіл випадкової величини – це відповідність між варіантами та їх ймовірностями, за якої найбільша ймовірність відповідає середньому арифметичному $\bar{X}$; в міру того, відповідні значення ймовірності плавно зменшуються. Найменші і найбільші значення x_i мають найменшу ймовірність. На форму кривої нормального розподілу, окрім $\bar{X}$, впливає середнє квадратичне відхилення σ (рис. 3.4.)

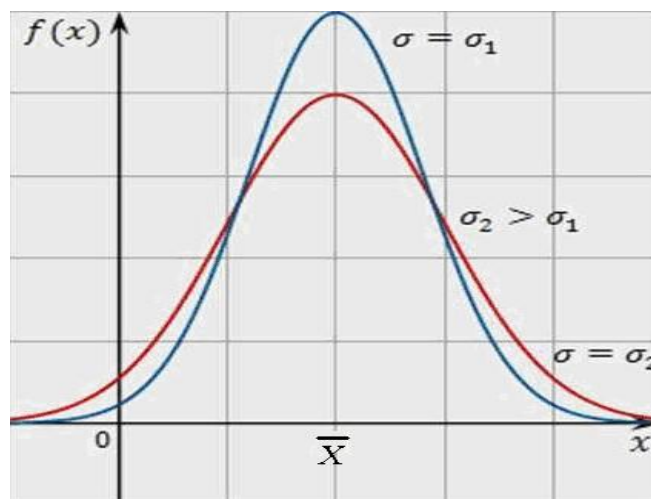


Рис. 3.4. Криві нормального розподілу при різних значеннях середнього квадратичного відхилення σ

Для оцінки варіювання результатів вимірювань використовують наступні співвідношення:

Ширина інтервалу	Відсоток усіх результатів
$\pm 1,96 \sigma (u = \pm 1,96)$	95%
$\pm 2,58 \sigma (u = \pm 2,58)$	99%
$\pm 3,29 \sigma (u = \pm 3,29)$	99,9%
$\pm 1\sigma (u = \pm 1)$	68,27%
$\pm 2\sigma (u = \pm 2)$	95,45%
$\pm 3\sigma (u = \pm 3)$	99,73%

Інакше кажучи, відхилення, більшого, ніж σ , слід чекати приблизно в одному випадку з трьох; відхилення, більшого, ніж 2σ , – в чотирьох-п'яти випадках зі 100, відхилення, більшого, ніж 3σ , – у трьох із 1000. Останнє співвідношення для нормального розподілу називають "правилом трьох сигм" і використовують при виключенні "помилкових" результатів вимірювань, що сильно відхиляються (рис. 3.5).

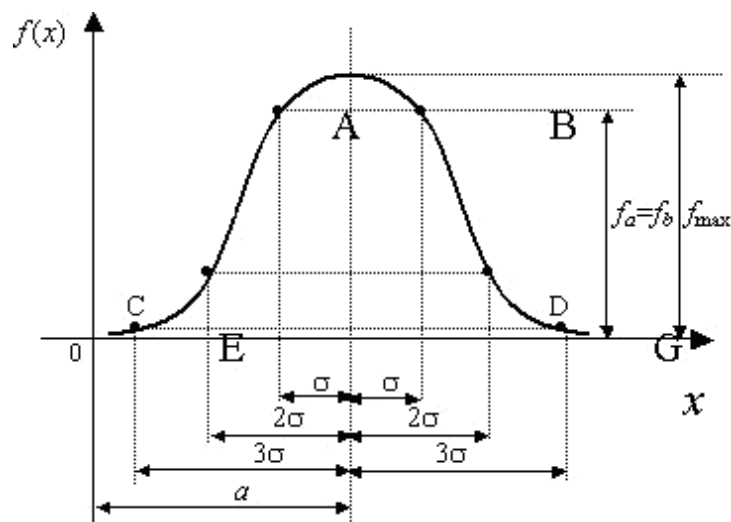


Рис. 3.5. Графічна інтерпретація "правила трьох сигм"

"Правило трьох сигм" використовують не лише для виключення помилкових результатів, що відрізняються більше ніж на 3σ від $\bar{X}$. За його допомогою можна перевірити на відповідність нормальності розподілу. Якщо під кривою на проміжку $\bar{X} \pm 3\sigma$ міститься 99,73 % площі, то розподіл можна вважати нормальним (рис. 3.6).

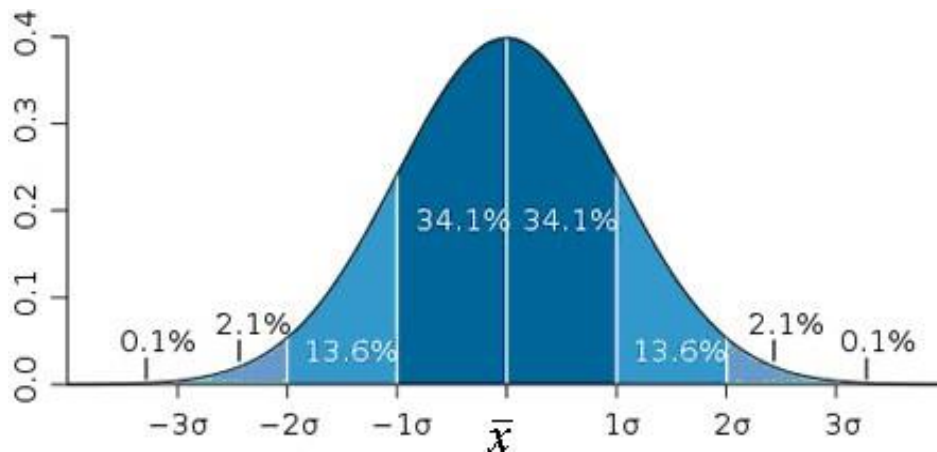


Рис. 3.6. Відповідність нормальності розподілу за "правилом трьох сигм"

Як було зазначено, *суть вибіркового методу* полягає у тому що на підставі даних, отриманих на вибірці, робиться висновок щодо всієї генеральної сукупності.

Для розв'язання цієї задачі існує два класи методів:

- оцінювання параметрів;
- перевірка гіпотез.

Під час використання вибіркового методу насамперед визначають $\bar{X}_{ген}$ без дослідження всіх об'єктів генеральної сукупності.

Для цього необхідно:

- а) скласти репрезентативну вибірку;
- б) для неї знайти $\bar{X}_{виб}$;

в) обчислити *помилку репрезентативності*, яка вказує на відмінності між середніми значеннями генеральної і вибіркової сукупностей:

$$m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n}}, \text{ коли } n \geq 20;$$

$$m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n-1}}, \text{ коли } n < 20.$$

г) здійснити точкову або інтервальну оцінку середнього арифметичного генеральної сукупності.

Оцінка означає, що слід відповісти наскільки $\bar{X}_{виб}$ буде відрізнятися від $\bar{X}_{ген}$.

1. Точкова оцінка: $\bar{X}_{ген} = \bar{X}_{виб} \pm m$.

2. Інтервальна оцінка:

За відомими $\bar{X}_{виб}$ і $\sigma_{виб}$ можна встановити інтервал, в якому може перебувати значення генеральної сукупності $\bar{X}_{ген}$. Але про це говорять лише з певною ймовірністю.

Ймовірності, які є доступними для того, щоб за вибірковими характеристиками можна було судити про генеральні, називають **надійністю** – (P). Прийнято використовувати такі ймовірності: $P=0,95$; $P=0,99$; $P=0,999$.

Довірчий інтервал – це інтервал у якому із заданою надійністю P знаходиться генеральний параметр.

Різниця між максимальним значенням ймовірності і значенням надійності називають *рівнем значущості*:

$$\alpha = 1 - P.$$

Надійність задається до початку обчислення, виходячи із завдань дослідження. Вибраний рівень надійності забезпечується достатнім об'ємом вибірки.

Таким чином, надійність і об'єм вибіркової сукупності пов'язані. Цей зв'язок виражений через t -критерій *Стьюдента*:

$$t = \frac{\bar{X}_{виб} - \bar{X}_{ген}}{m}$$

Критерій Стьюдента залежить лише від числа ступенів свободи, що виражено числом вибірки.

t – критерій надійності, можна знайти в таблиці Стьюдента (табл. Д 1.2).

Отже, щоб знайти межі довірчого інтервалу, необхідно:

- 1) для заданого об'єму вибірки n обчислити $\bar{X}_{виб}$, $\sigma_{виб}$;
- 2) задати надійність ($P=0,95$; $P=0,99$; $P=0,999$);
- 3) за таблицею Стьюдента (знаючи P і n) знайти t_α ;
- 4) обчислити межі довірчого інтервалу за формулою:

$$\bar{X}_{виб} - t_\alpha \cdot m \leq \bar{X}_{ген} \leq \bar{X}_{виб} + t_\alpha \cdot m.$$

Для визначення мінімальної вибірки потрібно знати точність вимірювання ε :

$$\varepsilon = \frac{U_{\alpha} \sigma}{\sqrt{n}}.$$

$U_{\alpha}=1,96$, якщо $P=0,95$

$U_{\alpha}=2,58$, якщо $P=0,99$

$U_{\alpha}=3,29$, якщо $P=0,999$.

Отже, необхідний об'єм вибірки отримуємо із співвідношення:

$$n = \left(\frac{U_{\alpha} \cdot \sigma}{\varepsilon} \right)^2.$$

Розв'язання типових задач і вправ

Приклад 3.1. Побудувати графіки варіаційного ряду 20 досліджуваних за показниками результатів тестування стрибка у висоту, якщо ці вибірки такі:

x_i , см $\sim$ 185, 170, 190, 170, 190, 178, 188, 175, 192, 178, 176, 180, 185, 176, 180, 192, 190, 190, 192, 194.

Розв'язування:

1. Робимо ранжирування варіаційного ряду в порядку зростання:
 x_i , см $\sim$ 170, 170, 174, 176, 176, 178, 178, 180, 180, 185, 185, 188, 190, 190, 190, 190, 192, 192, 192, 194.

2. Визначаємо мінімальне і максимальне значення варіант і розраховуємо розмах варіаційного ряду за формулою:

$$R = X_{\max} - X_{\min} \quad (1)$$

$$R = 194 - 170 = 24 \text{ см}$$

3. Розраховуємо число класів за формулою Стерджеса :

$$N = 1 + 3,31 \cdot \lg n;$$

$$N = 1 + 3,31 \cdot \lg 20 = 1 + 3,31 \cdot 1,301 = 5,30631 \approx 5$$

4. Розраховуємо інтервал кожного класу за формулою:

$$k = \frac{R}{N} = \frac{24}{5} = 4,8 \text{ (см)}$$

5. Складаємо таблицю меж

№ класу	Границя класу	Середнє значення класу	Частота класу	Накопичена частота класу
1.	$X_{min} \leq x_i < X_{min}+k$ 170см $\leq x_i < 174,8$ см	172,4 см	3	3
2.	$X_{min} +k \leq x_i < X_{min}+2k$ 174,8см $\leq x_i < 179,6$ см	177,2 см	4	7
3.	$X_{min} +2k \leq x_i < X_{min}+3k$ 179,6см $\leq x_i < 184,4$ см	182 см	2	9
4.	$X_{min} +3k \leq x_i < X_{min}+4k$ 184,4см $\leq x_i < 189,2$ см	186,8 см	3	12
5.	$X_{min} +4k \leq x_i < X_{min}+5k$ 189,2см $\leq x_i < 194$ см	191,6 см	8	20

6. Розраховуємо середнє значення кожного класу за формулою:

$$\bar{x} = \frac{x_{н.гр.кл} + x_{в.гр.кл}}{2};$$

$$\bar{x}_1 = \frac{170 + 174,8}{2} = 172,4 \text{ (см)}.$$

7. Побудуємо графіки гістограми (рис. 3.7) і полігону (рис. 3.8) цього варіаційного ряду.

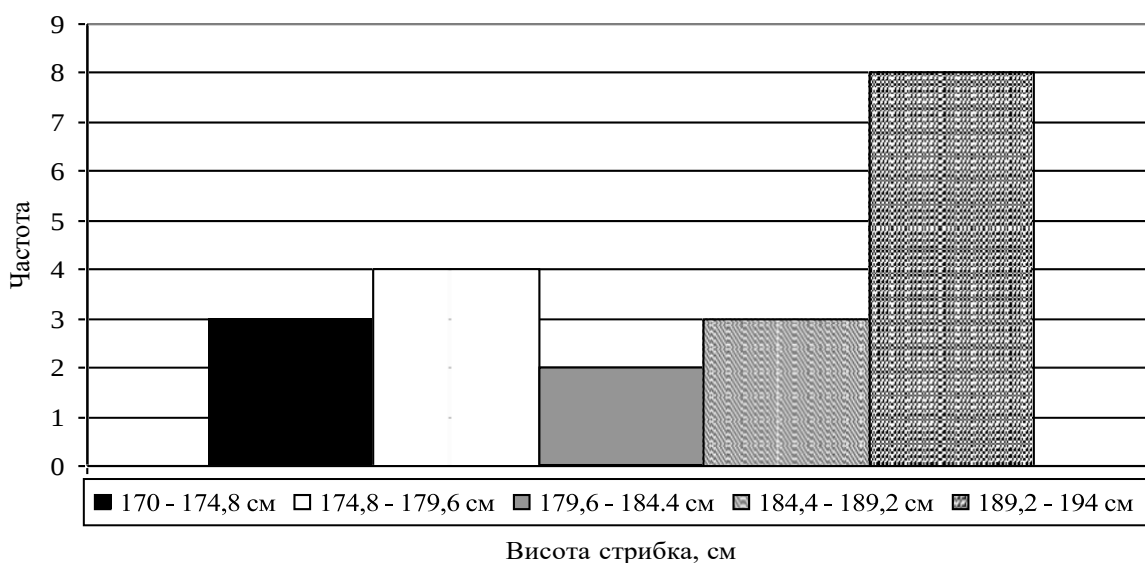


Рис. 3.7. Гістограма розподілу варіаційного ряду

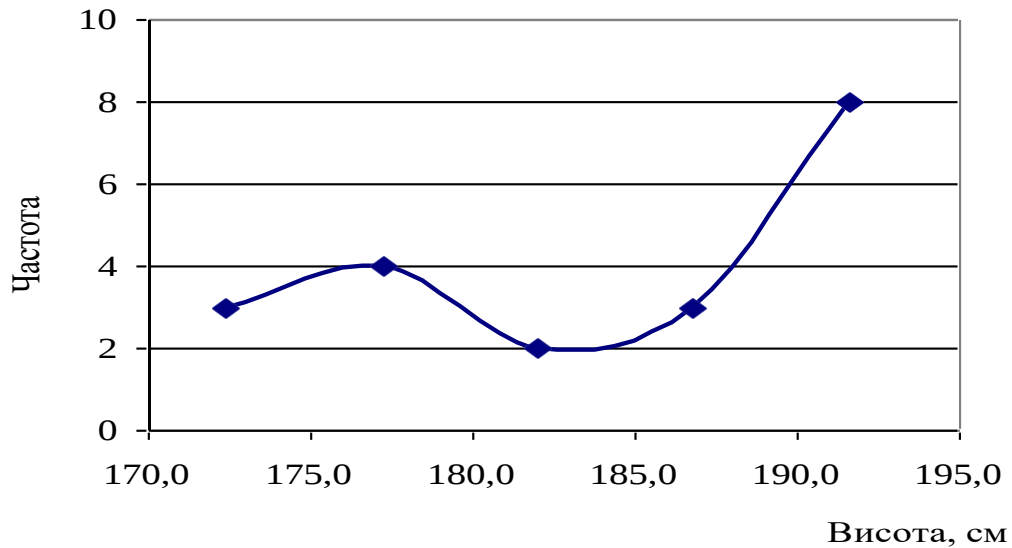


Рис. 3.8. Полігон розподілу варіаційного ряду

8. Зробимо висновки за побудованими графіками гістограми і полігону про однорідність вибірки за заданою ознакою, враховуючи такі моменти:

- якщо гістограма і полігон за своїм виглядом близькі до виду графіку нормального розподілу величин, то група однорідна;
- якщо графіки низькі і розтягнуті, то група, можливо, однорідна, але некомпактна;
- якщо графіки мають дві і більше вершини, то група неоднорідна за цією ознакою, її необхідно розбити на підгрупи, щоб із кожною з підгруп вести заняття за індивідуальним планом.

Висновок: оскільки на представлених графічних залежностях гістограма і полігон мають дві вершини, то групу досліджуваних за показником стрибка у висоту можна вважати неоднорідною.

Приклад 3.2. Визначити довірчий інтервал пульсу спокою за 15 с із надійністю $P=95\%$ у групи студентів, якщо відомо наступні дані вибірок:

$$x_i, \text{ уд.} \sim 14, 16, 17, 17, 16, 17, 17, 16, 18, 17 \ (n=10).$$

Розв'язування:

1. Довірчий інтервал за Стьюдентом має вигляд:

$$\bar{X}_{виб} - t_{\alpha} \cdot m \leq \bar{X}_{ген} \leq \bar{X}_{виб} + t_{\alpha} \cdot m;$$

де:

$\bar{X}_{ген}$ – середнє значення генеральної сукупності;

m – помилка середнього арифметичного, що обчислюється за

формулою: $m = \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n}}$.

де: t_{α} – критерій Стьюдента з таблиці;

α – рівень довірчої імовірності.

2. Заносимо результати тестування в робочу таблицю:

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
14	-2	4
16	0	0
17	1	1
17	1	1
16	0	0
17	1	1
17	1	1
16	0	0
18	2	4
17	1	1
$\bar{x} = 16,5 \approx 16$ уд	$\sum(x_i - \bar{x}) = 5$ уд	$\sum(x_i - \bar{x})^2 = 13$ уд ²

3. Обчислимо значення стандартного відхилення і помилки середнього арифметичного:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \pm \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}};$$

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{13}{9}} = \pm \sqrt{1,44} \approx 1,22 \text{ уд.}$$

$$m = \pm \frac{\sigma_{виб}}{\sqrt{n-1}} = \pm \frac{1,22}{3} = \pm 0,4 \text{ уд.}$$

4. Число ступенів свободи k у цьому випадку обчислюємо за формулою:

$$k=n.$$

Звідси знаходимо співвідношення $t_{\alpha} \cdot m = 2,33 \cdot 0,4 = 0,892 \approx 0,9$ уд.

$$16 - 0,9 \leq \bar{X}_{ген} \leq 16 + 0,9;$$

$$15,1 \leq \bar{X}_{ген} \leq 16,9.$$

Висновок: з ймовірністю 95 % можна стверджувати, що середнє значення генеральної сукупності показника пульсу спокою за 15 с не вийшло б за межі від 15,1 до 16,9 ударів.

Ніж більша надійність (P), тим ширший інтервал розподілу величин.

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 3.1. У 43 легкоатлетів при виконанні старту з наступним бігом на 6 м виміряна величина стартової реакції (с):

1,25 1,36 1,38 1,32 1,32 1,36 1,40 1,30 1,38 1,30 1,40 1,36
 1,42 1,45 1,38 1,36 1,42 1,38 1,32 1,25 1,38 1,36 1,30 1,40
 1,32 1,36 1,45 1,38 1,42 1,40 1,36 1,38 1,42 1,32 1,25 1,30.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.2. У бігу на 200 м юнаки показали такі результати (с):

28,5	27,8	27,4	26,8	27,0	28,0
27,8	27,8	27,4	27,8	27,4	28,0
27,8	27,0	27,8	28,0	27,4	28,0
31,0	27,4	27,0.			

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування

№ 3.3. Дано результати швидкості бігу в м/с:

3,0 3,4 3,3 2,8 3,0 2,8 3,1 3,2 3,1 3,3 3,3 3,4 3,1
 3,0 3,1 3,2 3,0 3,0 3,1 3,2 3,4 3,3 3,1 3,2 3,0 3,2
 3,0 2,8 2,8 3,1 2,8 3,1 3,2 3,4 3,3 3,4 3,1 3,2 3,2
 3,3.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.4. Дано результати швидкості бігу в м/с:

3,2 3,4 3,3 3,1 3,4 3,2 3,1 3,2 3,1 3,3 3,3 3,4 3,1
3,4 3,1 3,2 3,4 3,3 3,1 3,2 3,4 3,3 3,3 3,2 3,3 3,2
3,4 3,3 3,2 3,3 3,2 3,3 3,2 3,4 3,2 3,4 3,1 3,2 3,4
3,3.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.5. Дано результати стрибка у висоту з місця для дітей 14-років:

38,0 35,0 41,2 32,4 30,2 35,0 32,4 40,0 38,0 35,0 41,2 32,4
35,0 38,0 30,2 35,0 41,2 32,4 38,0 40,0 30,2 35,0 41,2 38,0
32,4 30,2 38,0 41,2 35,0 30,2 32,4 40,0 41,2 38,0 35,0 32,4
35,0 38,0 40,0 41,2.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.6. Дано результати стрибка у висоту з місця для дітей 15-років:

38,0 36,0 34,0 35,2 36,0 34,0 38,0 36,4 36,0 35,2 38,0 39,5
35,2 36,4 35,2 36,0 38,0 36,4 35,2 36,4 36,0 36,4 35,2 36,0
38,0 36,4 38,0 35,2 36,0 36,4 34,0 36,0 38,0 35,2 36,4 36,0
35,2 36,0 39,5 34,0.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.7. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100.

73 72 65 68 72 73 65 68 72 65 73 72 75
73 68 78 72 75 73 65 72 65 78 73 68 72
73 75 78 73.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.8. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100.

70 69 64 72 69 70 64 72 69 64 70 69 75
70 72 76 69 75 70 64 69 65 76 70 72 69
70 64 76 70.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.9. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,10 1,00
1,05 1,08 1,10 1,15 1,20 1,08 1,00 1,10 1,05 1,08 1,15 1,20
1,08 1,10 1,15 1,20 1,08 1,05.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.10. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,20 1,30 1,00 1,12 1,20 1,00 1,26 1,12 1,30 1,20 1,00 1,32
1,12 1,26 1,32 1,20 1,12 1,26 1,12 1,00.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.11. У легкоатлетів при виконанні старту з наступним бігом на 6 м виміряна величина стартової реакції (с):

1,25 1,36 1,38 1,32 1,32 1,36 1,40 1,30 1,38 1,30 1,40 1,36
1,42 1,45 1,38 1,36 1,32 1,38 1,36 1,36 1,36 1,40, 1,42 1,48
1,34 1,36.

Побудувати графіки варіаційного ряду результатів тестування.

№ 3.12. У легкоатлетів при виконанні старту з наступним бігом на 6 м виміряна величина стартової реакції (с):

1,36 1,30 1,40 1,32 1,36 1,45 1,38 1,42 1,40 1,36 1,38 1,42
1,32 1,25 1,30 1,30 1,32 1,40 1,42 1,40, 1,38 1,42 1,38 1,30
1,38 1,36 1,38 1,30.

Визначити довірчий інтервал величини стартової реакції (с) із надійністю $P=95\%$.

№ 3.13. У легкоатлетів при виконанні старту з наступним бігом на 6м виміряна величина стартової реакції (с):

1,36 1,42 1,45 1,38 1,36 1,42 1,38 1,32 1,25 1,38 1,36 1,30
 1,40 1,32 1,36 1,38 1,40 1,40 1,42 1,36 1,36 1,38 1,32 1,32
 1,38 1,36 1,36 1,38.

Визначити довірчий інтервал величини стартової реакції (с) із надійністю $P=95\%$.

№ 3.14. У бігу на 200 м юнаки показали наступні результати (с):

28,5	27,8	27,4	26,8	27,0	27,4
28,0	27,8	27,0	27,8	27,0	28,0
27,8	27,8	27,8.	27,4	27,8	26,8
27,4	27,8	27,4			

Визначити довірчий інтервал результатів у бігу на 200 м із надійністю $P=95\%$.

№ 3.15. Дано результати швидкості бігу в м/с: 3,0 3,4 3,3

2,8 3,0 2,8 3,1 3,2 3,1 3,3 3,3 3,4 3,1 3,0 3,1 3,0
 3,4 3,1 3,1 3,2 3,2 3,1 3,0 3,4 3,3 3,3 3,1 3,4 3,3
 3,2.

Визначити довірчий інтервал результатів швидкості бігу із надійністю $P=95\%$.

№ 3.16. Дано результати швидкості бігу в м/с:

3,2 3,0 2,8 2,8 3,1 2,8 3,1 3,2 3,4 3,3 3,4 3,1 3,2
 3,2 3,3.

Визначити довірчий інтервал результатів у бігу із надійністю $P=95\%$.

№ 3.17. Дано результати швидкості бігу в м/с:

3,3 3,1 3,2 3,4 3,3 3,3 3,2 3,3 3,2 3,4 3,3 3,2 3,3
3,2 3,4.

Визначити довірчий інтервал результатів у бігу із надійністю $P=95\%$.

№ 3.18. Дано результати стрибка у висоту з місця для учнів 14-років:

38,0 35,0 41,2 32,4 30,2 35,0 32,4 40,0 38,0 35,0 41,2 32,4
35,0 38,0 30,2.

Визначити довірчий інтервал результатів стрибка у висоту з місця із надійністю $P=95\%$.

№ 3.19. Дано результати стрибка у висоту з місця для учнів 14-років:

30,2 38,0 41,2 35,0 30,2 32,4 40,0 41,2 38,0 35,0 32,4 35,0
38,0 40,0 41,2.

Визначити довірчий інтервал результатів стрибка у висоту з місця із надійністю $P=95\%$.

№ 3.20. Дано результати стрибка у висоту з місця для учнів 15-років:

36,4 38,0 35,2 36,0 36,4 34,0 36,0 38,0 35,2 36,4 36,0 35,2
36,0 39,5 34,0.

Визначити довірчий інтервал результатів стрибка у висоту з місця із надійністю $P=95\%$.

№ 3.21. Дано результати стрибка у висоту з місця для учнів 15-років:

38,0 36,0 34,0 35,2 36,0 34,0 38,0 36,4 36,0 35,2 38,0 39,5
35,2 36,4 35,2.

Визначити довірчий інтервал результатів стрибка у висоту з місця із надійністю $P=95\%$.

№ 3.22. Дано результати стрибка у висоту з місця для учнів 15-років:

35,2 36,4 35,2 36,0 38,0 36,4 35,2 36,4 36,0 36,4 35,2 36,0
38,0 36,4 38,0.

Визначити довірчий інтервал результатів стрибка у висоту з місця із надійністю $P=95\%$.

№ 3.23. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100.

73 72 65 68 72 73 65 68 72 65 73 72 75
73 68.

Визначити довірчий інтервал результатів кваліфікації воротаря хокейної команди із надійністю $P=95\%$.

№ 3.24. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100:

65 68 72 73 65 68 72 65 73 72 75 73 68
78 72.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.25. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100:

72 65 68 72 73 72 65 73 72 75 73 68 78
72 75.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.26. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100:

70 69 64 72 69 70 64 72 69 64 70 69 75
70 72.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.27. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100:

69 70 64 72 69 64 70 69 75 70 72 76 69
75 70.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.28. Для визначення кваліфікації воротаря хокейної команди впродовж 30-ти днів фіксували кількість відбитих кидків із 100:

76 69 75 70 64 69 64 76 70 72 69 70 64
76 70.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.29. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,10 1,00 1,05 1,08 1,10 1,15 1,20 1,08 1,00 1,10 1,05 1,08
1,15 1,20 1,08.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 2.30. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,15 1,20 1,08 1,00 1,10 1,05 1,08 1,15 1,20 1,08 1,10 1,15
1,20 1,08 1,05.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.31. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,20 1,30 1,00 1,12 1,20 1,00 1,26 1,12 1,30 1,20 1,00 1,32
1,12 1,26 1,32.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.32. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,20 1,30 1,00 1,12 1,20 1,00 1,26 1,12 1,30 1,20 1,20 1,12
1,26 1,12 1,00.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 3.33. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,20 1,30 1,00 1,30 1,20 1,00 1,32 1,12 1,26 1,32 1,20 1,12
1,26 1,12 1,00.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

№ 2.34. Відомо швидкість плавання плавців (м/с):

1,00 1,12 1,20 1,00 1,26 1,12 1,30 1,20 1,12 1,26 1,32 1,20
1,12 1,26 1,12.

Перевірити вибірку на відповідність нормальному розподілу і зробити педагогічні висновки.

Контрольні питання

1. У чому полягає суть вибіркового методу?
2. Графічне зображення варіаційних рядів, мета побудови графіків.
3. Що таке полігон розподілу?
4. Що таке гістограма розподілу?
5. Що таке нормальний розподіл?
6. У чому полягає суть «правила трьох сигм»?
7. Що описує формула Муавра?
8. Що таке помилка репрезентативності?
9. Точкова оцінка середнього арифметичного генеральної сукупності та послідовність її здійснення.
10. Інтервальна оцінка середнього арифметичного генеральної сукупності та послідовність її здійснення.
11. Що називається надійністю?
12. Що таке довірчий інтервал?
13. Що таке рівень значущості?
14. У чому полягає суть критерію Стюдента?

4. Параметричні та непараметричні методи порівняння вибірок

Теоретичні відомості

Статистична достовірність має суттєве значення у метрологічному контролі у галузі фізичної культури.

Вибірки, які відрізняються значимо і принципово, тобто належать до різних генеральних сукупностей, називаються *статистично достовірно* відмінними.

Для оцінки статистично достовірних відмінностей вибірок застосовують спеціальні критерії, які поділяються на *параметричні* та *непараметричні*.

Параметричні критерії передбачають обов'язкову наявність нормального закону розподілу, оскільки використовують основні показники нормального розподілу – середнє арифметичне $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення σ . Параметричні критерії є найточнішими і коректними.

Критерій Стьюдента використовується для порівняння абсолютних показників різних за об'ємом вибірок.

Його застосування передбачає таку послідовність дій.

1. За формулою обчислюється t -критерій Стьюдента:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}},$$

де $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ – середні арифметичні порівнюваних вибірок;

m_1, m_2 – помилки репрезентативності порівнюваних вибірок.

2. Для заданої надійності P (або α) та числа степенів свободи $k = n_1 + n_2 - 2$ за таблицею (табл. Д 1.2) знаходимо граничне значення критерію Стьюдента $t_{гр}$.

3. Порівнюємо t і $t_{гр}$.

4. Робимо висновки:

– якщо $t \geq t_{гр}$, то відмінність між порівнюваними вибірками є статистично достовірною;

– якщо $t < t_{гр}$, то відмінності статистично недостовірні.

Критерій Фішера застосовується для порівняння показників розсіювання вибірок. Це, як правило, означає порівняння за показниками стабільності спортивної роботи або стабільності функціональних і технічних показників.

Його застосування передбачає таку послідовність дій.

1. За формулою обчислюється F – критерій Фішера:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2},$$

де σ_1 і σ_2 – дисперсії вибірок, які порівнюють.

Вважається, що дисперсії позначаються таким чином, щоб забезпечити завжди співвідношення $F > 1$.

2. Задаємо надійність P і визначаємо числа ступенів свободи для обох вибірок: $k_1 = n_1 - 1$; $k_2 = n_2 - 1$.

3. За таблицею (табл. Д 1.3) знаходимо граничне значення $F_{гр}$.

4. За результатами порівняння критеріїв F і $F_{гр}$ робимо висновки:

– якщо $F \geq F_{гр}$, то відмінності між вибірками статистично достовірні;

– якщо $F < F_{гр}$, то відмінності між вибірками статистично недостовірні.

Непараметричні критерії базуються на рангових (порядкових) відмінностях між елементами вибірок.

Критерій Вілкоксона застосовується для вибірок однакового об'єму при попарному порівнянні цих елементів.

Критерій Вілкоксона визначається так:

1. Задають надійність обчислень і визначають число ступенів вільності як $k = n - 1$, де n – кількість пар елементів обох груп. За таблицею (табл. Д 1.5) знаходимо граничне значення $W_{гр}$.

2. Порівняння критеріїв W і $W_{гр}$ дає підставу зробити висновки:

– якщо $W \geq W_{гр}$, то відмінності між вибірками статистично недостовірні;

– якщо $W < W_{гр}$, то відмінності між вибірками статистично достовірні.

Для знаходження критерію Вілкоксона W використовують порядковий номер (ранг) різниці кожної пари елементів вибірок.

Розв'язання типових задач і вправ

Приклад 4.1. Оцінити ефективність методики розвитку силових якостей юнаків 11 класу за результатами тестування підтягування, яке проводилося на початку x_1 та в кінці експерименту x_2 .

$x_1 \sim 13 \ 11 \ 14 \ 14 \ 15 \ 12 \ 13 \ 14 \ 15 \ 16 \ 10 \ 12 \ 15 \ 17 \ 14 \ 13 \ 15$
 $12 \ 15 \ 14;$
 $x_2 \sim 12 \ 13 \ 13 \ 16 \ 17 \ 15 \ 18 \ 13 \ 15 \ 10 \ 13 \ 12 \ 14 \ 16 \ 12 \ 13 \ 13$
 $15 \ 18 \ 14.$

Зробити статистичний і педагогічний висновок.

Розв'язування

Знаходимо основні статистичні характеристики результатів до та після експерименту.

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^k x_{1i} n_{1i}}{n_1} = 13,7; \sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_{1i} - \bar{x}_1)^2 n_{1i}}{n_1 - 1}} = 1,7; m_1 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{n_1 - 1}} = 0,39.$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^k x_{2i} n_{2i}}{n_2} = 14,1; \sigma_2 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (x_{2i} - \bar{x}_2)^2 n_{2i}}{n_2 - 1}} = 2,1; m_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{n_2 - 1}} = 0,48.$$

Обчислюємо критерій Ст'юдента:

$$t = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}} = 0,42.$$

Задаємо надійність $P=0,95$.

Число ступенів свободи $k = n_1 + n_2 - 2 = 20 + 20 - 2 = 38$.

За таблицею (табл. Д1.2) знаходимо граничне значення критерію Ст'юдента $t_{\text{гр}} = 2,02$.

Обчислюємо критерій Фішера:

$$F = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} = 1,53.$$

Задаємо надійність $P=0,95$ і визначаємо числа ступенів свободи для обох вибірок: $k_1 = n_1 - 1 = 19$; $k_2 = n_2 - 1 = 19$.

За таблицею (табл. Д1.3) знаходимо граничне значення критерію Фішера $F_{\text{гр}} = 2,2$.

Висновок: Порівнюємо t і $t_{гр}$, а також F і $F_{гр}$. Оскільки $t < t_{гр}$, то відмінності між результатами вибірок є статистично недостовірні.

Окрім того, $F < F_{гр}$, що свідчить про статистично недостовірні відмінності між вибірками.

Педагогічний висновок: встановлено, що за показниками підтягування відмінності між рівнем силових якостей групи до і після застосування тренувального впливу є статистично недостовірними. Необхідно також зауважити, що за результатами тренування однорідність групи не зазнала змін. Це свідчить про неефективність застосовуваної методики тренувального процесу.

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 4.1. У групі досліджуваних в кількості 18 осіб визначали ЧСС (уд/хв.) до x_i і після y_i виконання фізичної вправи.

$x \sim$ 150 154 156 158 154 158 160 154 156 164 156 158 156
164 160 158 156 160.

$y \sim$ 174 164 166 169 170 172 164 166 169 169 170 169 172
169 170 174 166 169.

Оцінити ефективність впливу вправи на показник ЧСС.

№ 4.2. У двох груп дітей 14 (x_i) та 15 (y_j) років виміряно висоту стрибка з місця:

№ з/п	x_i , см	n_i	y_j , см	n_j
1	30,2	5	34,0	4
2	32,4	7	35,2	9
3	35,0	9	36,0	10
4	38,0	8	36,4	8
5	40,0	4	38,0	7
6	41,2	7	39,0	2

Проаналізуйте зміну висоти стрибка в залежності від віку.

№ 4.3. Порівняйте результати швидкості бігу в контрольній (x_i) та експериментальній (y_j) групах:

№ з/п	x_i , м/с	n_i	y_j , м/с	n_j
1	3,6	2	3,7	3
2	3,7	4	3,9	4
3	3,8	5	4,0	9
4	3,9	8	4,1	8
5	4,0	6	4,2	4
6	4,2	5	4,3	2

Чи ефективний експеримент?

№ 4.4. Відомо результати часу від подачі сигналу до удару по м'ячу ногою на початку тренувань (x_i) і в кінці (y_j):

№ з/п	x_i , с	n_i	y_j , с	n_j
1	3,2	1	3,1	2
2	3,4	3	3,2	6
3	3,5	6	3,3	7
4	3,6	5	3,4	5
5	3,7	4	3,5	1
6	3,8	3	3,6	1

Чи підвищилася кваліфікація футболіста?

№ 4.5. Відомі результати тесту на гнучкість у двох групах гімнастів – контрольній (x_i) та експериментальній (y_j):

№ з/п	x_i , см	n_i	y_j , см	n_j
1	30	5	35	1
2	32	10	40	4
3	35	10	45	9
4	38	4	48	8
5	40	3	50	7
6	42	2	53	2

Оцінити ефективність експериментальної методики.

№ 4.6. У двох групах гандболістів досліджували час відштовхування під час кидка м'яча у ворота – x_i ($n_i=16$) та y_j ($n_j=18$):

№ з/п	x_i , с	n_i	y_j , с	n_j
1	0,18	3	0,18	3
2	0,17	3	0,14	5
3	0,16	4	0,13	6
4	0,15	3	0,12	2
5	0,14	2	0,11	1
6	0,13	1	0,10	1

Чи однотипні показники відштовхування?

№ 4.7. У двох спортсменів вимірювали частоту кроків:

№ з/п	x_i, c^{-1}	n_i	y_j, c^{-1}	n_j
1	2,8	3	2,6	2
2	2,9	5	2,7	4
3	3,0	8	3,0	6
4	3,1	9	3,2	7
5	3,2	5	3,4	8
6	3,3	1	3,5	3

Встановити, чи однорідна частота кроків двох спортсменів.

Контрольні питання

1. Які вибірки називаються статистично достовірно відмінними?
2. Назвати параметричні критерії, що застосовують для оцінки статистично достовірних відмінностей вибірок?
3. Назвати непараметричні критерії, що застосовують для оцінки статистично достовірних відмінностей вибірок?
4. Розкрити умови та послідовність застосування критерію Стьюдента для порівняння вибірок.
5. Розкрити умови та послідовність застосування критерію Фішера для порівняння вибірок.
6. Розкрити умови і послідовність застосування критерію Вілкоксона для порівняння вибірок.

5. Взаємозв'язок результатів вимірювань

Теоретичні відомості

Між досліджуваними величинами часто існує певний зв'язок. Це означає, що вони між собою певним чином пов'язані і впливають одна на одну. Характер такого зв'язку може бути різним, але здебільшого виділяють два види: функціональний і статистичний.

Функціональний зв'язок передбачає таку залежність, коли одному фіксованому значенню величини x відповідає чітко визначене значення іншої величини – y . Тоді така залежність може бути представлена у вигляді $y = f(x)$, а графічно – це якась лінія.

Водночас, може бути такий тип зв'язку, коли одному значенню величини x відповідає одночасно декілька значень y і навпаки (наприклад: маса – довжина тіла). Така залежність, коли одному значенню певної величини x відповідає одночасно декілька значень іншої y_1, y_2, y_3 , називається *статистичною*.

У дослідженнях в галузі фізичної культури здебільшого мають справу статистичними залежностями. Їх вивчення дає змогу встановити певні закономірності між досліджуваними величинами, що важливо у практичній діяльності вчителя, тренера та ін.

Кореляція полягає у тому, що в статистичних залежностях середнє значення однієї величини змінюється залежно від середнього значення іншої.

Для дослідження взаємозв'язків між величинами використовують статистичний метод – *кореляційний аналіз*. Основними завданнями кореляційного аналізу є:

- визначення форми взаємозв'язку;
- визначення тісноти взаємозв'язку;
- визначення спрямованості взаємозв'язку.

Визначення форми взаємозв'язку розпочинається із графічного представлення результатів вимірювань у прямокутній системі координат. Для цього графічно зображають відповідність між x і y для кожної пари результатів. Отримане зображення називають *кореляційним полем* або *діаграмою розсіяння*. Графічна залежність може бути лінійною (або близькою до лінійної) (рис. 5.1. а), нелінійною – (рис. 5.1. б), або відсутньою – (рис. 5.1. в).

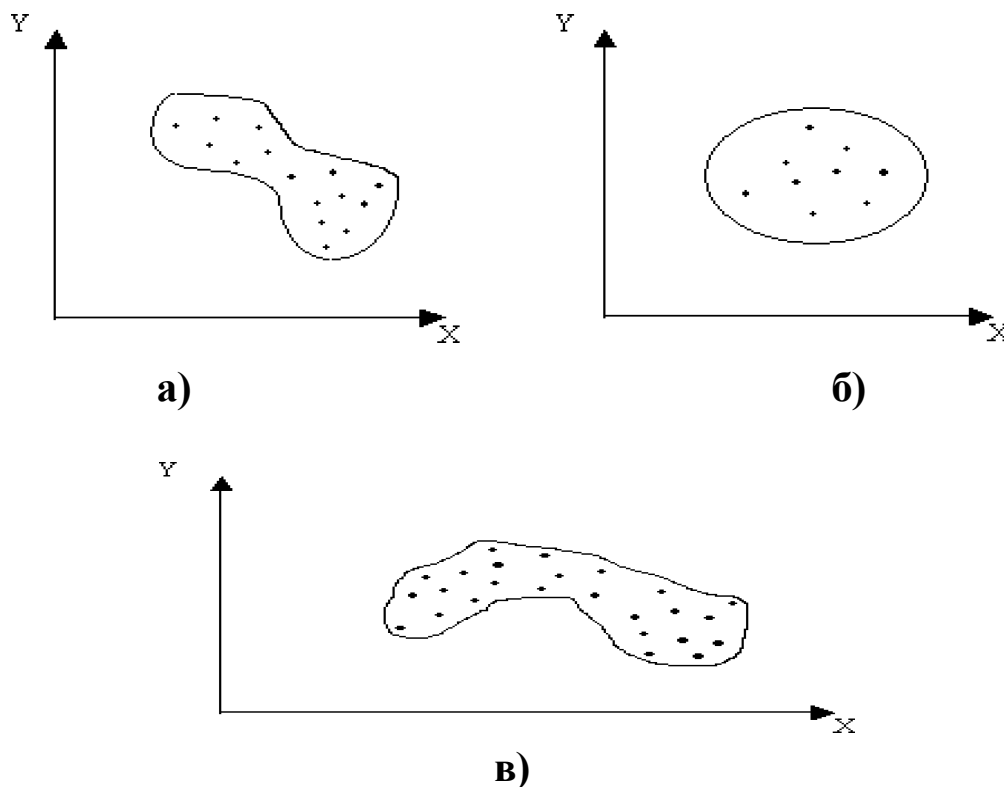


Рис. 5.1. Види діаграм розсіювання

Знання форми залежності має важливе значення для подальшого вибору формули для обчислення коефіцієнта кореляції.

Визначення тісноти взаємозв'язку. Тіснота взаємозв'язку результатів вимірювань характеризує спеціальний показник, який називається коефіцієнтом кореляції (r , ρ , R , r_{xy} , $r_{xy,z}$).

Якщо: $r=0$ – залежність відсутня;

$r=0,09-0,19$ – залежність дуже слабка;

$r=0,2-0,49$ – залежність слабка;

$r=0,5-0,69$ – залежність середня;

$r=0,7-0,99$ – залежність сильна;

$r=1$ – зв'язок функціональний.

Визначення спрямованості взаємозв'язку. Взаємозв'язок може мати різний характер: прямопропорційна залежність (позитивна (рис. 5.2. а), негативна (рис. 5.2 б)), функціональна (рис. 5.2. в), відсутня (рис. 5.2. г).

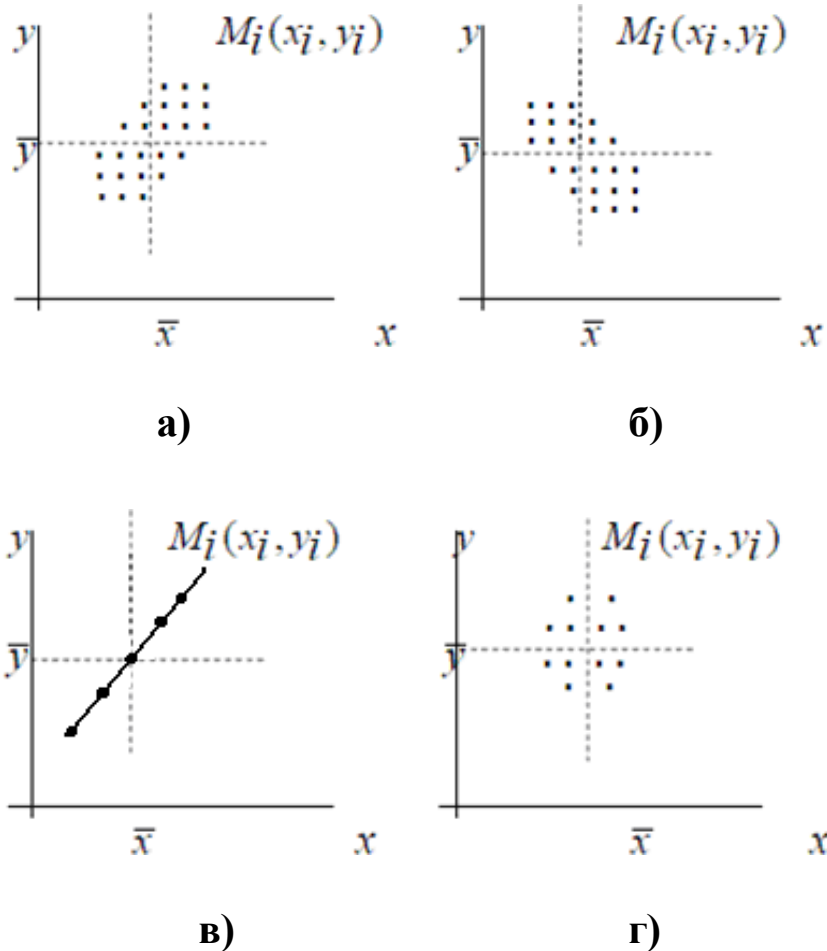


Рис. 5.2. Характер взаємозв'язку результатів вимірювань

Для визначення коефіцієнтів кореляції існують певні математичні співвідношення, застосування яких обумовлюється наступними умовами:

- шкалою, в якій виміряно величини;
- кількістю виміряних результатів;
- відповідністю вибірки нормальному розподілу.

Якщо вимірювання проведено у *шкалі відношень або інтервалів*, то при лінійному взаємозв'язку для обчислення коефіцієнта кореляції застосовують формулу Браве-Пірсона:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n\sigma_x\sigma_y},$$

де $\bar{x}$, $\bar{y}$ – середні арифметичні досліджуваних величин;
 n – об'єм вибірки;

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \quad - \quad \text{середні квадратичні}$$

відхилення.

Іноді знаходять також тісноту взаємозв'язку на основі коефіцієнта детермінації:

$$D = r^2 \cdot 100\%.$$

Коефіцієнт детермінації $D < 100\%$ і визначає частину загальної варіації одного показника, яка визначається варіацією іншого показника.

Наприклад: $D = 30\%$ означає, що тільки на 30 % відсотків величина x впливає на результати y , а решту 70 % впливу на варіацію y здійснюють інші величини.

Якщо на практиці є більше параметрів: $x, y, z, q \dots$ і необхідно визначити вплив лише одного на інший при незмінних решту, то обчислюють *частковий (парціальний) коефіцієнт кореляції*. Наприклад, якщо необхідно оцінити вплив x на y і виключити вплив z , то:

$$r_{xy,z} = \frac{r_{xy}^2 - r_{xz}r_{yz}}{\sqrt{(1-r_{xz})^2(1-r_{yz})^2}},$$

де r_{xy}, r_{xz}, r_{yz} – парні коефіцієнти кореляції Браве-Пірсона.

$$-1 \leq r_{xy,z} \leq 1.$$

Для дослідження тісноти взаємозв'язку між показниками x та деяких інших величин використовують *множинний коефіцієнт кореляції*:

$$R_{xyz} = \sqrt{\frac{r_{xy}^2 + r_{xz}^2 - 2r_{xy}r_{xz}r_{yz}}{1 - r_{yz}^2}}.$$

Причому $0 \leq R \leq 1$.

Вимірювання у шкалі порядку зумовлює використання рангового коефіцієнта кореляції Спірмена:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n-1)(n+1)},$$

де $d = d_{x_i} - d_{y_i}$ – різниця рангів даної пари показників x та y ;
 n – об'єм вибірки.

Якщо вимірювання проводилися у шкалі найменувань, то вимірювані величини можуть мати лише два значення – 0 або 1. Тоді використовують тетрагоричний коефіцієнт кореляції:

$$T_4 = \frac{|A \cdot D - B \cdot C| - 0,5n}{\sqrt{(A+B)(C+D)(A+C)(B+D)}},$$

де A – відповідає числу спроб, коли збігаються обидва показники:

$x=1, y=1$;

$B: x=0, y=1$;

$C: x=1, y=0$;

$D: x=0, y=0$.

Якщо між досліджуваними параметрами існує лінійний статистичний взаємозв'язок, то він може бути представлений через рівняння регресії.

Рівняння регресії – це рівняння прямої, яка з певною точністю описує взаємозв'язок величин x та y (рис. 5.3.).

Рівнянь регресії є два – пряме і обернене.

Пряме: $y = a_1 + b_{y|x}x$; обернене: $x = a_2 + b_{x|y}y$.

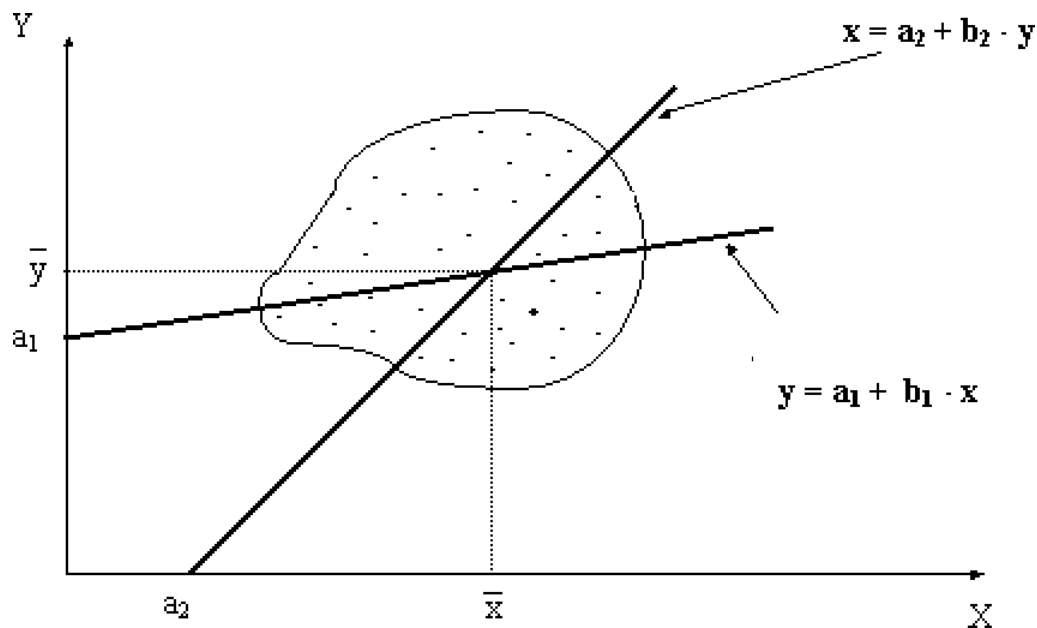


Рис. 5.3. Кореляційне поле і лінії прямого та оберненого рівняння регресії

Кутові коефіцієнти прямої визначаються за формулами:

$$b_{y|x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \text{ — для прямого; } b_{x|y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \text{ — для оберненого}$$

рівняння.

Для визначення вільних членів застосовують такі співвідношення:

$$a_1 = \bar{y} - b_{y|x} \bar{x} \text{ — для прямого; } a_2 = \bar{x} - b_{x|y} \bar{y} \text{ — для оберненого}$$

рівняння.

Для оцінки якості рівнянь регресії обчислюються залишкові середні квадратичні відхилення:

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} \text{ — для прямого; } \sigma_{x|y} = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} \text{ — для}$$

оберненого.

Але ці оцінки є абсолютні, а отже не можуть бути використані для порівняння. Тому застосовуються оцінки за відносними похибками рівнянь:

$$\delta_{y|x} = \frac{\sigma_{y|x}}{\bar{y}} \cdot 100\% \text{ — для прямого; } \delta_{x|y} = \frac{\sigma_{x|y}}{\bar{x}} \cdot 100\% \text{ — для}$$

оберненого.

Розв'язання типових задач і вправ

Приклад 5.1. Оцінити за відомими даними результатів вимірювань взаємозв'язок сили під час кидка м'яча в гандболі x_i (Н) і дальністю польоту м'яча y_i (м):

№ з/п	Сила кидка, x_i (Н)	Дальність польоту м'яча y_i (м)
1	10,12	25,2
2	10,30	26,4
3	10,65	27,2
4	11,00	27,9
5	11,90	28,5
6	12,30	31,2

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

Розв'язування:

1. Обчислюємо середні значення сили кидка x_i (Н) і дальності польоту м'яча y_i (м):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{10,12 + 10,30 + 10,65 + 11,00 + 11,90 + 12,30}{6} = 11,045 \text{ (Н)}.$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{25,2 + 26,4 + 27,2 + 27,9 + 28,5 + 31,2}{6} = 27,73 \text{ (м)}.$$

2. Визначаємо середні квадратичні відхилення σ_x та σ_y :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{6-1}} = \sqrt{\frac{(10,12 - 11,045)^2 + (10,30 - 11,045)^2 + (10,65 - 11,045)^2 + (11,00 - 11,045)^2 + (11,90 - 11,045)^2 + (12,30 - 11,045)^2}{5}} = \sqrt{0,62915} \approx 0,793 \text{ (Н)}.$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2}{6-1}} = \sqrt{\frac{(25,2 - 27,73)^2 + (26,4 - 27,73)^2 + (27,2 - 27,73)^2 + (27,9 - 27,73)^2 + (28,5 - 27,73)^2 + (31,2 - 27,73)^2}{5}} = \sqrt{4,2274} \approx 2,05 \text{ (м)}.$$

3. За формулою Браве-Пірсона знаходимо коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{6\sigma_x\sigma_y} = \frac{(10,12 - 11,045)(25,2 - 27,73) + (10,30 - 11,045)(26,4 - 27,73) + (10,65 - 11,045)(27,2 - 27,73) + (11,00 - 11,45)(27,9 - 27,73) + (11,90 - 11,045)(28,5 - 27,73) + (12,30 - 11,045)(31,2 - 27,73)}{6 \cdot 0,793 \cdot 2,05} = \frac{8,0744}{9,7539} \approx 0,82.$$

Висновки: 1) коефіцієнт кореляції $r=0,82$ засвідчує тісний взаємозв'язок між силою кидка і дальністю польоту м'яча; 2) оскільки $r>0$, то між досліджуваними величинами має місце пряма кореляційна залежність: зі збільшенням сили кидка зростає дальність польоту м'яча, і навпаки.

Таким чином, встановлено, що дальність польоту м'яча суттєво залежить від сили кидка.

Приклад 5.2. Визначити достовірність взаємозв'язку між показниками маси тіла та кількістю згинання і розгинання рук в упорі лежачи за допомогою рангового коефіцієнта кореляції, якщо відомі результати тестування:

№ з/п	Маса тіла, x_i (кг)	Згинання і розгинання рук в упорі лежачи y_i (к-ть)
1	55	26
2	45	20
3	43	25
4	47	22
5	47	27
6	51	28
7	48	16
8	60	15
9	53	18
10	50	24

Розв'язування:

1. Визначаємо ранги (порядкове місце за зростанням) маси тіла d_{xi} :

$d_{x1}=9; d_{x2}=2; d_{x3}=1; d_{x4}=3,5; d_{x5}=3,5; d_{x6}=7; d_{x7}=5; d_{x8}=10; d_{x9}=8; d_{x10}=6.$

2. Знаходимо ранги кількості згинання і розгинання рук в упорі лежачи d_{yi} :

$d_{y1}=8; d_{y2}=4; d_{y3}=7; d_{y4}=5; d_{y5}=9; d_{y6}=10; d_{y7}=2; d_{y8}=1; d_{y9}=3; d_{y10}=6.$

3. Обчислюємо ранговий коефіцієнт кореляції за формулою Спірмена:

$$\begin{aligned}\rho &= 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^{10} (d_{xi} - d_{yi})^2}{10(10-1)(10+1)} = 1 - \frac{6((9-8)^2 + (2-4)^2 + (1-7)^2 + (3,5-5)^2 + (3,5-9)^2 + \\ &+ (7-10)^2 + (5-2)^2 + (10-1)^2 + (8-3)^2 + (6-6)^2)}{10 \cdot 9 \cdot 11} = 1 - \frac{6(1+4+36+1,25+30,25+ \\ &+ 9+9+81+25+0)}{990} = 1 - \frac{6 \cdot 196,5}{990} \approx -0,19.\end{aligned}$$

Висновки: 1) коефіцієнт кореляції $\rho = -0,19$ засвідчує дуже слабкий взаємозв'язок між показниками маси тіла та кількістю згинання і розгинання рук в упорі лежачи; 2) оскільки $\rho < 0$, то між досліджуваними величинами має місце обернена кореляційна залежність: із збільшенням маси тіла зменшується кількість згинання і розгинання рук в упорі лежачи, і навпаки.

Таким чином, встановлено, що кількість згинання і розгинання рук в упорі лежачи несуттєво залежить від маси тіла.

Приклад 5.3. Відомо результати тестування дітей 12-ти річного віку в бігу на 2000 м і бігу на лижах 3000 м.

№ з/п	Біг на 2000 м, x_i , хв	Біг на лижах 3000 м, y_i , хв
1	9,5	17,9
2	9,8	18,5
3	10,2	18,8
4	11,5	19,4
5	12,0	19,8
6	12,8	20,5

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

Знайти коефіцієнти рівняння регресії. Записати рівняння регресії і побудувати його графік. Обчислити відносну похибку рівнянь.

Розв'язування:

1. Обчислюємо середні значення величин x_i та y_i :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{9,5 + 9,8 + 10,2 + 11,5 + 12,0 + 12,8}{6} \approx 10,97 \text{ (хв)}.$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{17,9 + 18,5 + 18,8 + 19,4 + 19,8 + 20,5}{6} \approx 19,15 \text{ (хв)}.$$

2. Визначаємо середні квадратичні відхилення σ_x та σ_y :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})^2}{6-1}} = \sqrt{\frac{(9,5-10,97)^2 + (9,8-10,97)^2 + (10,2-10,97)^2 + (11,5-10,97)^2 + (12,0-10,97)^2 + (12,8-10,97)^2}{5}} = \sqrt{1,7643} \approx 1,33 \text{ (хв)}.$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2}{6-1}} = \sqrt{\frac{(17,9-19,15)^2 + (18,5-19,15)^2 + (18,8-19,15)^2 + (19,4-19,15)^2 + (19,8-19,15)^2 + (20,5-19,15)^2}{5}} = \sqrt{0,883} \approx 0,93 \text{ (хв)}.$$

3. За формулою Браве-Пірсона знаходимо коефіцієнт кореляції:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{6\sigma_x\sigma_y} = \frac{(9,5-10,97)(17,9-19,15) + (9,8-10,97)(18,5-19,15) + (10,2-10,97)(18,8-19,15) + (11,5-10,97)(19,4-19,15) + (12,0-10,97)(19,8-19,15) + (12,8-10,97)(20,5-19,15)}{6 \cdot 1,33 \cdot 0,93} = \frac{6,14}{7,4214} \approx 0,83.$$

4. Визначаємо кутові коефіцієнти прямої:

$$b_{y|x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = 0,83 \frac{0,93}{1,33} \approx 0,58;$$

$$b_{x|y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,83 \frac{1,33}{0,93} \approx 1,19.$$

5. Обчислюємо вільні члени рівнянь регресії:

$$a_1 = \bar{y} - b_{y|x} \bar{x} = 19,15 - 0,58 \cdot 10,97 \approx 12,79.$$

$$a_2 = \bar{x} - b_{x|y} \bar{y} = 10,97 - 1,19 \cdot 19,15 \approx -11,82.$$

6. Визначаємо залишкові середні квадратичні відхилення:

$$\sigma_{y|x} = \sigma_y \sqrt{1 - r^2} = 0,93 \sqrt{1 - 0,83^2} = 0,93 \sqrt{0,311} \approx 0,519.$$

$$\sigma_{x|y} = \sigma_x \sqrt{1 - r^2} = 1,33 \sqrt{1 - 0,83^2} = 1,33 \sqrt{0,311} \approx 0,741.$$

7. Знаходимо відносні похибки рівнянь:

$$\delta_{y|x} = \frac{\sigma_{y|x}}{\bar{y}} \cdot 100\% = \frac{0,519}{19,15} \cdot 100\% \approx 2,7\%.$$

$$\delta_{x|y} = \frac{\sigma_{x|y}}{\bar{x}} \cdot 100\% = \frac{0,741}{10,97} \cdot 100\% \approx 6,8\%.$$

8. Записуємо рівняння регресії.

Пряме рівняння представимо у вигляді $y = a_1 + b_{y|x}x$, тобто $y = 12,79 + 0,58 \cdot x$.

Обернене рівняння матиме вигляд $x = a_2 + b_{x|y}y$, а саме $x = -11,82 + 1,19 \cdot y$.

9. Будуємо графіки прямого та оберненого рівнянь регресії (рис. 5.4). Для цього знаходимо координати двох точок на лінії прямого рівняння:

$$x_1 = 0; y_1 = 12,79 + 0,58 \cdot 0 = 12,79;$$

$$x_2 = 5; y_2 = 12,79 + 0,58 \cdot 5 = 15,69.$$

Для оберненого:

$$y_1 = 15; x_1 = -11,82 + 1,19 \cdot 15 = 6,03;$$

$$y_2 = 10; x_1 = -11,82 + 1,19 \cdot 10 = 0,08.$$

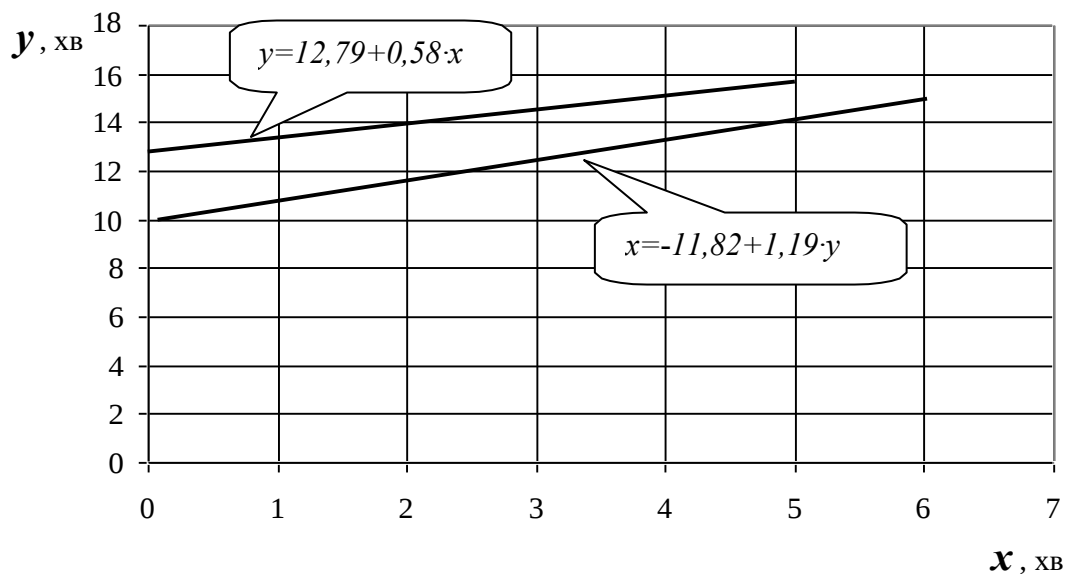


Рис. 5.4. Графіки прямого та оберненого рівнянь регресії

Висновок: оскільки відносна похибка оберненого рівняння регресії є більша, ніж прямого, шуканим рівнянням регресії слід вважати $y = 12,79 + 0,58 \cdot x$.

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 5.1. Відомо результати тестування дітей десятирічного віку в бігу на 20 м з ходу і човникового бігу 4х9 м.

№ з/п	Біг на 20м, с	Човниковий біг 4х9м, с
1	3,1	11,4
2	3,8	11,6
3	3,7	11,8
4	3,8	12,0
5	4,0	12,1
6	4,3	12,3

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

№ 5.2. Відомо результати тестування учнів десятого класу в стрибках у довжину з розбігу і човникового бігу 4х9 м.

№ з/п	Стрибок у довжину з розбігу, м	Човниковий біг 4х9м, с
1	4,80	9,7
2	4,50	9,6
3	4,50	9,8
4	4,20	10,2
5	5,00	9,4
6	4,10	10,2

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

№ 5.3. Відомо силу тяги м'язів та швидкість їх скорочення.

№ з/п	Сила тяги, Н	Швидкість скорочення, см/с
1	0,62	28,0
2	0,65	26,5
3	0,72	24,3
4	0,84	22,1
5	0,95	20,7
6	1,05	18,4
7	1,29	18,0
8	1,34	12,5
9	1,42	10,2
10	1,58	10,1

Встановити тісноту взаємозв'язку.

№ 5.4. Перед змаганнями у важкоатлетів виміряно показники м'язевої сили, відповідно до яких спортсменів розподілено за місцями. На змаганнях вони посіли відповідні місця:

№ з/п	Сила	Місце на змаганнях с
1	1	2
2	2	1
3	3	3
4	4	5
5	5	4
6	6	6
7	7	7

Чи впливає величина м'язевої сили на спортивний результат?

№ 5.5. Учасники змагань з гирьового спорту зайняли відповідні місця у поштовху та ривку:

№ з/п	Поштовх	Ривок
1	4	4
2	3	2
3	1	1
4	2	3
5	7	6
6	8	7
7	5	5
8	6	8
9	9	10
10	10	9

Чи існує зв'язок між цими показниками?

№ 5.6. У вправах на перекладині та брусах гімнасти посіли такі місця:

№ з/п	Перекладина	Бруси
1	1	4
2	2	2
3	3	1
4	4	3
5	5	5
6	6	7
7	7	6
8	8	8
9	9	10
10	10	9

Чи існує зв'язок між результатами виступів у цих видах програми?

№ 5.7. На змаганнях з фігурного катання зафіксовано результати виступів обов'язкової та довільної програм:

№ з/п	Обов'язкова	Довільна
1	1	3
2	2	2
3	3	1
4	4	6
5	5	5
6	6	4
7	7	8
8	8	7
9	9	9
10	10	10

№ 5.8. Відомо результати тестування дітей 12-ти річного віку в бігу на 2000 м і бігу на 60 м з високого старту.

№ з/п	Біг на 2000 м, хв	Біг на 60 м, с
1	9,5	8,8
2	9,8	8,4
3	10,2	9,0
4	11,5	9,5
5	12,0	9,9
6	12,8	10,1

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

Знайти коефіцієнти рівняння регресії. Записати рівняння регресії і побудувати його графік. Обчислити відносну похибку рівнянь.

№ 5.9. Відомо результати тестування дітей 12-річного віку в бігу на лижах 3000 м і бігу на 60 м з високого старту.

№ з/п	Біг на лижах 3000 м, хв.	Біг на 60 м, с
1	17,9	8,8
2	18,5	8,4
3	18,8	9,0
4	19,4	9,5
5	19,8	9,9
6	20,5	10,1

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

Знайти коефіцієнти рівняння регресії. Записати рівняння регресії і побудувати його графік. Обчислити відносну похибку рівнянь.

№ 5.10. Відомо результати тестування дітей 10-річного віку в бігу на 20м з ходу і човникового бігу 4х9 м.

№ з/п	Біг на 20м, с	Човниковий біг 4х9м, с
1	3,2	11,4
2	3,8	11,7
3	3,7	11,8
4	4,8	12,5
5	4,0	12,1
6	4,3	12,3

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

Знайти коефіцієнти рівняння регресії. Записати рівняння регресії і побудувати його графік. Обчислити відносну похибку рівнянь.

№ 5.11. Відомо результати тестування учнів 10-го класу в стрибках у довжину з розбігу і човникового бігу 4х9 м.

№ з/п	Стрибок у довжину з розбігу, м	Човниковий біг 4х9м, с
1	4,80	9,7
2	3,50	10,6
3	4,50	9,8
4	4,20	10,2
5	4,20	10,0
6	4,10	10,2

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

Знайти коефіцієнти рівняння регресії. Записати рівняння регресії і побудувати його графік. Обчислити відносну похибку рівнянь.

№ 5.12. Відомі результати тестування в бігу на 60 м і швидкістю їзди на велосипеді:

№ з/п	Біг на 60 м, с	Швидкість, км/год
1	9,0	18,0
2	9,0	18,1
3	9,1	17,5
4	9,2	17,4
5	9,3	16,8
6	9,3	16,5
7	9,4	16,5
8	9,5	16,0
9	9,5	16,1
10	9,5	16,0

Обчислити коефіцієнт кореляції і встановити тісноту взаємозв'язку між результатами зазначених тестів.

Знайти коефіцієнти рівняння регресії. Записати рівняння регресії і побудувати його графік. Обчислити відносну похибку рівнянь.

Контрольні питання

1. У чому полягає суть кореляції?
2. Статистичний взаємозв'язок результатів та приклади його прояву.
3. Функціональний взаємозв'язок результатів вимірювань.
4. Кореляційне поле та його різновиди.
5. Зміст і порядок обчислення коефіцієнта кореляції.
6. Зміст та порядок обчислення коефіцієнта детермінації.
7. Рівняння регресії і порядок його визначення.

6. Основи теорії спортивних тестів

Теоретичні відомості

Тестом називається вимірювання чи випробування стандартної форми, яке проводиться з метою визначення стану чи можливостей людини.

Будь-яке вирівнювання є тестом, якщо воно відповідає таким вимогам:

- 1) стандартність – процедура і умови тестування повинні бути однаковими в усіх випадках застосування тесту;
- 2) наявність системи оцінок;
- 3) надійність;
- 4) інформативність.

Тести, які задовольняють вимоги надійності та інформативності, називаються *добротними* або *автентичними*.

Процес випробування називається *тестуванням*, а отримане в результаті вимірювання числове значення – *результатом тестування*. Наприклад, стрибок у довжину з розбігу – тест, процедура проведення вимірювання – тестування, довжина стрибка – результат тесту.

Моторними (руховими) називаються тести, в основі яких лежать рухові завдання. Їх результатами можуть бути рухові досягнення (час проходження дистанції, кількість повторень, пройдена відстань), або біохімічні та фізіологічні показники (рН, ЧСС, PWO_{170} та ін.)

Залежно від видів завдання, яке стоїть перед дослідником, виділяють три групи рухових тестів:

а) контрольні вправи

Завдання спортсмена – показати максимальний результат. Результат такого виду тестування є рухові досягнення (біг 3000м, результат).

б) стандартні функціональні проби

У такому виді тестування завдання є однакові для всіх виконавців, але дозуються за:

- за величиною виконаної роботи;
- за величиною фізіологічних зрушень.

Результатом такого виду тестування є:

- фізіологічні показники при стандартній роботі;
- рухові показники при стандартній величині фізіологічних зрушень.

в) *максимальні функціональні проби*

Завдання цього виду тестів – визначити максимально можливі результати. Результатом можуть бути фізіологічні чи біохімічні показники (наприклад, визначення максимального кисневого боргу чи максимального споживання кисню).

Інколи використовують не один, а декілька тестів, які підпорядковані одній меті. Така група тестів, які проводяться з однією метою, називається *батареєю тестів*.

Один і той самий тест, застосований до одних і тих самих випробовуваних, повинен давати в однакових умовах однакові результати (вони повинні збігатися). Але навіть при строгій стандартизації і точній вимірювальній апаратурі результати тестування у різних спробах дещо відрізняються між собою (варіюють) – наприклад, результати у бігу на 100 м: 10,2 с, 10,1 с.

Надійністю тесту називається ступінь збігання результатів при повторному тестуванні одних і тих самих випробовуваних (або інших об'єктів) в однакових умовах. Варіацію результатів при повторних вимірюваннях називають *внутрішньодивідуальною* чи *внутрігруповою*, або *внутрікласовою*.

Варіацію результатів тестування зумовлюють такі причини:

- 1) зміна стану досліджуваних (втома, навичка, увага);
- 2) неконтрольовані зміни зовнішніх умов і апаратури (температура, напруга, вітер, присутність сторонніх осіб);
- 3) зміна стану людини, яка проводить тестування;
- 4) недосконалість самого тесту.

Теорія надійності тестів виходить з того, результати будь-якого вимірювання:

$$X_t = X_{\infty} + X_e, \quad (6.1)$$

де X_{∞} – істинний результат, X_e – похибка, зумовлена неконтрольованими змінами досліджуваного і випадковими похибками вимірювання.

Істинним результатом вважають середнє значення при нескінченно великому числу досліджень (вимірювань).

Якщо похибки випадкові, то:

$$\sigma_t^2 = \sigma_\infty^2 + \sigma_e^2 \quad (6.2)$$

Враховуючи те, що *середнє квадратичне відхилення*, або *стандартне відхилення* є показником розсіювання варіантів (значень) відносно їх середнього значення:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}}, \text{ коли } n > 30; \quad (6.3)$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}, \text{ коли } n \leq 30. \quad (6.4)$$

σ_∞^2 – характеризує ідеалізовану (вільну від помилок) між класову варіацію;

σ_e^2 – внутрікласову змінність.

Коефіцієнтом надійності називається відношення істинної дисперсії до дисперсії, зареєстрованої під час вимірювань:

$$r_{tt} = \frac{\text{істинна} \cdot \text{дисперсія}}{\text{зареєстрована} \cdot \text{дисперсія}}, \text{ тобто}$$

$$r_{tt} = \frac{\sigma_\infty^2}{\sigma_t^2} = \frac{\sigma_t^2 - \sigma_e^2}{\sigma_t^2} = 1 - \frac{\sigma_e^2}{\sigma_t^2}. \quad (6.5)$$

Коефіцієнт надійності – це доля істинної варіації в тій варіації, зареєстрованій у досліді.

Окрім коефіцієнта надійності, використовують також *індекс надійності*:

$$r_{t\infty} = \sqrt{r_{tt}}. \quad (6.6)$$

Це теоретичний коефіцієнт кореляції зареєстрованих значень з істинними.

Поняття X_∞ є абстракцією, тому використовують побічні методи його оцінки.

Найбільш оптимальним для оцінки надійності тестів є дисперсійний аналіз.

Окрім того, необхідно розраховувати внутрікласовий коефіцієнт кореляції:

$$\tilde{\eta} = \frac{\sigma_{\text{вн}}^2}{\sigma^2 + \left(\frac{\bar{K}}{K^1} - 1 \right) \frac{\sigma_{\text{сум}}^2}{\sigma^2}} \cdot \quad (6.7)$$

Але варто пам'ятати, що цей коефіцієнт надійності не є абсолютним показником, який характеризує тест. Зазначений показник може змінюватися залежно від контингенту випробовуваних, умов тестування.

Надійність експериментальних даних знижує величину оцінок коефіцієнтів кореляції. Жодний один тест не може корелювати з жодним тестом більше, ніж з самим собою. Тобто верхньою межею оцінки коефіцієнта кореляції уже не є ± 1 , а індекс надійності $r_{t\infty} = \sqrt{r_{tt}}$. Щоб від оцінки коефіцієнтів кореляції між емпіричними даними перейти до оцінки кореляції між істинним значенням, необхідно скористатися виразом:

$$\hat{r}_{xy} = \frac{r_{xy}}{\sqrt{r_{xx}r_{yy}}}, \quad (6.8)$$

де $\hat{r}_{xy}$ – кореляція між істинними значеннями X і Y ;

r_{xy} – кореляція між емпіричними даними;

r_{xx}, r_{yy} – оцінки надійності X і Y .

Формула (6.8) називається кореляцією на зменшення *Спірмена-Брауна*.

Незважаючи на те, що фіксованого значення надійності не існує, все-таки у більшості випадків спортивних вимірювань використовують такі приблизні значення надійності:

0,95 – 0,99 – відмінна надійність;

0,90 – 0,94 – добра;

0,80 – 0,89 – прийнятна;

0,70 – 0,79 – погана;

0,60 – 0,69 – сумнівна для індивідуальних оцінок (але тест може бути придатним для групових вимірювань).

Добитися підвищення надійності тестів можна за допомогою збільшення кількості повторних спроб.

При декількох повторних спробах результати можна визначати різними способами:

- а) за кращою спробою;
- б) за середнім арифметичним;
- в) за медіаною;
- г) за середнім із двох чи трьох кращих спроб.

У більшості випадків найбільш надійним є використання середнього арифметичного, дещо менш надійною є медіана, ще менш надійна – краща спроба.

Основними характеристиками надійності тестів є стабільність (відтворюваність), узгодженість, еквівалентність.

Стабільністю (відтворюваністю) тесту називають відтворюваність результатів при його повторенні через певний час в однакових умовах. Повторне тестування називають *ретестом*.

Тест → часовий інтервал → ретест.

У спортивних вимірюваннях можливі два випадки:

– ретест проводять для того, щоб отримати об'єктивні дані про стан випробовуваного впродовж часу між тестом і ретестом. Тут важливі точні результати тесту і надійність оцінюється методами дисперсійного аналізу;

– важливо визначити збереження порядкових місць випробовуваних у групі. У цьому випадку стабільність оцінюють за коефіцієнтом кореляції між тестом і ретестом.

Стабільність тесту залежить від таких факторів:

- виду тесту;
- контингенту випробовуваних;
- часового інтервалу між тестом і ретестом.

Наприклад: морфологічні характеристики при невеликих інтервалах часу є стабільні. Найменш стабільні тести на точність. Також різною є стабільність тестів у дорослих і дітей.

Із збільшенням часового інтервалу між тестом і ретестом стабільність знижується.

Інформативність тесту – це ступінь точності, з якою він вимірює властивість (характеристику) досліджуваного об'єкта.

Інформативність тесту ще називають *валідністю*.

У різних випадках одні і ті ж самі тести можуть мати різну інформативність.

Питання про інформативність тесту визначає:

- що вимірює тест;
- як точно досліджувану властивість виміряно.

Якщо тест використовується для визначення стану спортсмена на момент обстеження, то характеризують його *діагностичну інформативність*. Коли на основі тестування хочуть передбачити майбутні показники, то говорять про *прогностичну інформативність*.

Ступінь інформативності може характеризуватися кількісно (*емпірична інформативність*) і якісно (*змістова чи логічна інформативність*).

Якщо існує вимірюваний критерій, то можна визначати емпіричну інформативність. Сутність визначення емпіричної інформативності полягає у тому, що результати тесту порівнюють з деяким критерієм. Для цього обчислюють коефіцієнт кореляції між критерієм і тестом – коефіцієнт інформативності r_{tk} . За критерій береться показник, який наперед і безперечно відображає певну властивість, що має вимірюватися з допомогою цього тесту. Дуже часто таким критерієм може виступати сам результат: більш інформативним є той тест, кореляція якого зі спортивним результатом вища.

Тестом-критерієм служить показник, що свідомо і безперечно відображає якість системи, яку планують вимірювати з його допомогою.

Найчастіше в спортивній метрології критеріями служать:

- 1) спортивний результат;
- 2) кількісна характеристика змагальної діяльності (наприклад, довжина кроку у бігу, сила відштовхування в стрибках, відсоток точних передач у футболі тощо);
- 3) результати іншого тесту, інформативність якого доведена;
- 4) приналежність до певної групи. Наприклад, можна порівнювати майстрів спорту і спортсменів нижчих розрядів; приналежність до однієї з цих груп є критерієм;
- 5) так званий складовий критерій, наприклад, сума очок у багатоборстві.

Приклад визначення інформативності одного і того самого тесту (швидкість бігу 30 м з ходу у чоловіків) при різних критеріях наведено в таблиці 6.1. Дані отримані на 62 спортсменів, які показали у стрибках у довжину результати від 600 до 772 см; результати в багатоборстві бралися на підставі опитування.

Інформативність тесту "біг 30 м з ходу" (n=62)

Критерій	Міра критерію	Коефіцієнт інформативності
Стрибок в довжину з розбігу Розбіг в стрибках у довжину	Результат стрибка (см) Швидкість бігу на останніх 10 м (м/с)	0,658 0,918
Спортивні досягнення в стрибках у довжину	Розряд з легкої атлетики (від другого до майстра спорту)	0,715
Результат в триборстві: біг 100 м, стрибки в довжину, біг 100 м с/б	Сума очок	0,764

Питання про вибір критерію є, по суті, найбільш важливим при визначенні реального значення та інформативності тестів.

При практичному використанні показників емпіричної інформативності слід мати на увазі, що вони справедливі лише стосовно тих досліджуваних і умов, для яких вони розраховані. Тест, інформативний у групі початківців, може виявитися зовсім не інформативним у групі майстрів спорту.

Інформативність тесту неоднакова в різних за складом групах. Зокрема, в групах, більш однорідних за своїм складом, тест зазвичай менш інформативний.

Коефіцієнт інформативності дуже сильно залежить від надійності тесту і критерію. Тест з низькою надійністю завжди мало інформативний, тому немає сенсу перевіряти малонадійні тести на інформативність. Недостатня надійність критерію також приводить до зниження коефіцієнтів інформативності. Проте в цьому випадку

було б неправильно нехтувати тестом як малоінформативним; адже верхньою межею можливої кореляції тесту є не ± 1 , а його індекс надійності. Тому треба порівнювати коефіцієнт інформативності з цим індексом. Дійсну інформативність (з поправкою на надійність критерію) розраховують за формулою:

$$\hat{r}_{tk} = \frac{r_{tk}}{\sqrt{r_{kk}}},$$

r_{tk} – коефіцієнт інформативності;

r_{kk} – надійність критерію.

Коефіцієнт інформативності може визначатися як коефіцієнт кореляції між результатом тесту і тесту-критерію (наприклад, ранговий коефіцієнт кореляції):

$$r_{x,y}^S = 1 - \frac{6 \cdot \sum (dx_i - dy_i)^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Питання про вибір критерію є найважливішим при визначенні реального значення та інформативності тесту.

Якщо є види спорту (досліджувані характеристики), у яких не можна об'єктивно оцінити спортивну майстерність, то спортсменів розподіляють за рейтингом. Тоді місце, зайняте спортсменом, є критерієм, з яким порівнюють результати тестів з метою визначення їх інформативності.

Інформативність тесту не завжди можна визначити з допомогою експериментальних результатів і методів математичної статистики. Тоді вона визначається на основі логічних міркувань. Наприклад, легко підтвердити інформативність таких показників: час поворотів у плаванні, швидкість бігу у стрибках, подачі у волейболі, влучання в кошик у баскетболі.

Іноді можлива неправдива кореляція та інформативність тесту є висока, оскільки на неї може впливати третій показник.

Тому жоден із підходів, окремо взятий, не є достатнім. Отже, змістовий аналіз інформативності тесту і експериментально-математичне її обґрунтування повинні доповнювати одне одного.

Розв'язання типових задач і вправ

Приклад 6.1. Емпіричним шляхом визначити інформативність тесту станової динамометрії (x_i) в оцінці силових можливостей досліджуваних, використовуючи в якості тесту-критерію (y_i) максимальну кількість підтягувань на перекладині. При цьому дані вибірок такі:

x_i , кг $\sim$ 150; 140; 135; 100; 110; 115; 140.

y_i , к-ть разів $\sim$ 9; 6; 6; 3; 3; 4; 8.

Розв'язування:

1. Занесемо результати тестування в робочу таблицю і зробимовсі необхідні розрахунки:

x_i	dx	y_i	dy	$dx - dy$	$(dx - dy)^2$
150	1	9	1	0	0
140	2,5	6	3,5	-1	1
135	4	6	3,5	0,5	0,25
100	7	3	6,5	0,5	0,25
110	6	3	6,5	-0,5	0,25
115	5	4	5	0	0
140	2,5	8	2	0,5	0,25
				$\Sigma(dx - dy)=0$	$\Sigma(dx - dy)^2=2$

dx та dy – ранги (порядкове місце за зростанням) виміряних величин.

2. Підставимо отримані дані у формулу розрахунку рангового коефіцієнта кореляції і отримаємо:

$$r_{x,y}^s = 1 - \frac{6 \cdot \sum (dx_i - dy_i)^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 2}{7(49 - 1)} = 1 - \frac{12}{336} \approx 1 - 0,03 \approx 0,97.$$

3. Визначимо число ступенів свободи за формулою:

$$k = n.$$

Тоді при $k = 7$ і $\beta = 99\%$ знаходимо $r_{\text{табл}} = 0,94$.

Висновок: $r_{x,y}^s = 0,97 > r_{\text{табл.}} = 0,94$ при $k = 7$, то з упевненістю в 99 % можна говорити про те, що в даній групі досліджуваних тест станової динамометрії інформативний при оцінці рівня розвитку силових можливостей.

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 6.1. Емпіричним шляхом визначити інформативність тесту стрибка у довжину з місця (x_i) в оцінці швидкісно-силових можливостей досліджуваних, використовуючи як тест-критерій (y_i) результати стрибка угору. При цьому дані вибірок такі:

x_i , см $\sim$ 186; 170; 155; 160; 170; 175; 180.

y_i , см $\sim$ 40; 36; 30; 32; 34; 37; 38.

№ 6.2. Емпіричним шляхом визначити інформативність тесту згинання і розгинання рук в упорі лежачи (x_i) в оцінці силових можливостей досліджуваних, використовуючи як тест-критерій (y_i) результати вису на зігнутих руках. При цьому дані вибірок такі:

x_i , к-ть разів $\sim$ 32; 20; 15; 26; 28; 22; 24.

y_i , к-ть разів $\sim$ 43; 26; 9; 32; 34; 25; 27.

№ 6.3. Емпіричним шляхом визначити інформативність тесту метання медболу (x_i) в оцінці силових можливостей досліджуваних, використовуючи в якості тесту-критерію (y_i) результати кистьової динамометрії. При цьому дані вибірок такі:

x_i , см $\sim$ 27; 32; 45; 40; 37; 25; 35.

y_i , кг $\sim$ 408; 436; 520; 492; 465; 397; 480.

Контрольні питання

1. Що називається тестом?
2. Які тести називаються добротними?
3. Які тести називаються моторними (руховими)?
4. Що таке батарея тестів?
5. Що називається надійністю тесту?
6. Стабільність (відтворюваність) тесту.
7. Узгодженість тесту.
8. Еквівалентність тесту.
9. Інформативність тесту та її характеристики.
10. Що таке ретест?

7. Основи теорії оцінок. Шкали оцінок спортивних результатів

Теоретичні відомості

Проблема і завдання теорії оцінок

Завершальним етапом процедури тестування є педагогічна оцінка результатів тестових вимірювань. *Педагогічною оцінкою* називається узагальнена міра успіху в певному тестовому завданні. Вона необхідна у зв'язку з тим, що у батареї тестів кожний тест вимірюється в різних одиницях (наприклад, стрибок у довжину – у сантиметрах, м'язова сила – у кілограмах, частота рухів – у кількості рухів за 10 с, біг на 100 метрів – у секундах). Узагальнений же результат батареї тестів можна подати у вигляді оцінок (бали, очки, розряд, тощо).

Розрізняють *навчальні оцінки*, які виставляються за рівень засвоєння теоретичних знань, і *кваліфікаційні оцінки*, які визначають результативність тестування чи змагальної діяльності людини.

Оцінювання можна охарактеризувати як процедуру контролю рівня певного стану або досягнень у деякій діяльності, співвіднесення виявленого рівня з оцінними критеріями і надання йому відповідної відмітки – кількісного еквівалента *оцінки*. Простіше кажучи, *оцінюванням* називається процес визначення оцінок.

Оцінювання у фізичному вихованні і спорті складається з декількох етапів (М.А. Годик, 1988):

а) добирається шкала, за допомогою якої можливе переведення результатів тестів у оцінки;

б) відповідно до обраної шкали результати тесту перетворюються на очки (бали);

в) отримані бали визначають суму заключної оцінки, а вона порівнюється з віковими нормами.

Оцінки бувають *проміжними* і *заклучними*. Проміжні оцінки визначаються впродовж навчального року під час занять фізичними вправами дітей у школі чи тренувального циклу у спортсменів. Заклучні оцінки, як правило, визначаються у кінці року або тренувального циклу.

Ще оцінки можуть бути *діагностичними*, які відображають стан об'єкта (дитини, спортсмена) в певний момент часу, і *прогностичними* (відображають потенційні можливості розвитку об'єкта).

Необхідно мати на увазі, що педагогічні оцінки мають дві сторони: інформаційну і мотиваційну. *Інформаційне значення* педагогічної оцінки полягає у тому, що вона дає інформацію спортсмену і тренеру про рівень оцінюваної ознаки, дії, моторного акту. *Мотиваційне значення* – що той чи той рівень оцінки в різних умовах може заохочувати зусилля спортсмена (учня) або ж знижувати рухову активність у зв'язку зі зниженням відповідної мотивації.

Основні завдання оцінювання:

1. Зіставити різні досягнення в одному і тому самому завданні (тесті, фізичній вправі, спортивній дисципліні). Завдяки цьому можна створити науково обґрунтовані розрядні норми у видах спорту. Неправильне складання норм, а саме їх заниження, призведе до збільшення кількості розрядників, які недостойні цього звання. Завищені ж норми стануть для багатьох недосяжними, і змусять людей припинити заняття спортом.

2. Зіставити досягнення у різних завданнях.

3. Установити структуру рухової обдарованості та індивідуальний профіль фізичної підготовленості.

Залежно від завдання, що стоїть перед тестологом (спеціаліст, що виконує тестування), який оцінює результати тестових випробувань, можуть бути використані різні процедури (способи) і критерії оцінювання. Якщо припустити, що оцінка тестових випробувань відбувається суб'єктивно, тоді процедура оцінювання втратила б зміст, тому що її результат залежав би не стільки від рівня зареєстрованого показника, скільки від того, хто і як проводить його оцінювання. Оцінки стали б важко порівнюваними. Тому велике значення має стандартизація не тільки процедур вимірювання, а й прийомів і способів оцінювання.

Шкали оцінок

Багатомірна система тестових випробувань часто замінюється зручною для практичного використання єдиною бальною системою. Перевести результати тестування в бали можна різними способами. На практиці часто використовують ранжування або упорядкування зареєстрованого ряду змін. Однак такий підхід не може вважатися об'єктивним, оскільки однакову різницю в балах можуть мати спортивні результати, які між собою відрізняються суттєво.

Враховуючи вищесказане, переведення результатів тестування у оцінки потрібно проводити не за допомогою ранжування, а з

використанням для цього розроблених спеціальних шкал. Закон переведення спортивних результатів в бали називається *шкалою оцінок*. Шкала може бути задана у вигляді математичного виразу (формули), таблиці або графіка. Опишемо різні шкали.

Пропорційна шкала (рис. 7.1). Шкала передбачає нарахування однакової кількості балів при рівному прирості результатів. Із рисунка бачимо, що зменшення результатів веде до пропорційного зменшення кількості очок (балів). Тобто пропорційна шкала дає можливість нараховувати однакову кількість балів при рівному прирості результатів. Пропорційні шкали використовуються у сучасному п'ятиборстві, ковзанярському спорті, лижних перегонах, лижному двоборстві, біатлоні та інших видах спорту.

Регресуюча шкала (рис. 7.1). Ця шкала передбачає у міру наростання досягнень у тесті нарахування все меншої кількості балів. Деякому здається, що практичне використання таких шкал несправедливе, проте використання їх у багатьох випадках є доцільним. Шкали такого типу застосовуються у деяких видах легкоатлетичних стрибків і метань.

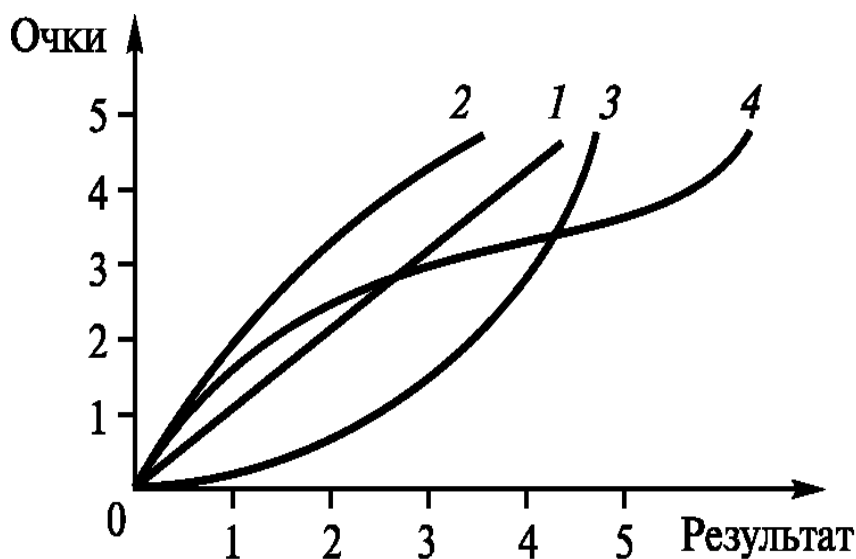


Рис. 7.1. Типи шкал, що використовуються при оцінюванні результатів тестування: 1 – пропорційна; 2 – регресуюча; 3 – прогресуюча; 4 – сигмовидна

Прогресуюча шкала (рис. 7.1). При використанні такої шкали рівні прирости результатів оцінюються по-різному. Що вищі абсолютні прирости, то більша прибавка в оцінці. Прогресуючі шкали використовуються у плаванні, важкій атлетиці, окремих видах легкої атлетики.

Прогресуюча шкала дає можливість за допомогою більш високих результатів прогресивно збільшувати їх оцінку.

Сигмовидна (або S-подібна) шкала (рис. 7.1). У цих шкалах поліпшення дуже низьких і дуже високих результатів заохочується слабо. Тут найвище оцінюється приріст результативності у середній зоні досягнень. Такі шкали широко використовуються при оцінці фізичної підготовленості різних груп населення. Наприклад, такий вигляд має шкала стандартів фізичної підготовленості населення США (В.В. Громько, Ю.Н. Вавилов, В.Г. Лепейко, 1991; А.В. Цьось, В.М. Довганюк, Н.М. Ковальчук, 1998).

Стандартна шкала. Ця шкала є різновидом пропорційної шкали. Названа тому так, що як масштаб нарахування балів у них використовуються стандартні (середньоквадратичні) відхилення. Шкали придатні у тому випадку, якщо розподіл результатів тестування близький до нормального. У цьому випадку однакові оцінки, отримані в різних завданнях за стандартною шкалою, свідчать про однакові (еквівалентні) досягнення. Крім того, використовуючи закономірності нормального розподілу, завжди можна визначити відсоток осіб, яким доступні вищі або нижчі досягнення в будь-якому діапазоні стандартної шкали (М.Ф. Alien, W.M. Yen, 1979).

Найпростішою стандартною шкалою є Z-шкала, в якій бали нараховуються згідно з нормальними відхиленнями (R.H. Bruininks, 1978; A.W. Burton, D.E. Miller, 1998):

$$Z_{\text{бали}} = \frac{X_i - \bar{X}}{\sigma}, \quad (7.1)$$

де X_i – оцінюваний результат, $\bar{X}$ – середнє арифметичне значення результату у вибірці осіб, σ – стандартне відхилення.

Середній результат за цією шкалою прирівнюється до 0 балів. Результати вищі за середню величину одержують позитивні оцінки, а результати нижче середньої – негативні. Для нормально розподілених результатів 99,7% оцінок лежать в інтервалі σ від -3 до $+3$.

Проте ця шкала не зовсім зручна для практичної роботи через негативні значення оцінок. Ця незручність легко нівелюється в інших стандартних шкалах за допомогою такого прийому: середнє арифметичне значення і стандартне відхилення прирівнюються до деяких чисел, обраних таким чином, щоб одержати зручні градації шкали. У найбільш популярній Т-шкалі середнє значення результату прирівнюється до 50 балів, а стандартне відхилення – до 10 балів (В.М. Заціорский, 1982):

$$T = 50 + 10Z . \quad (7.2)$$

При масових обстеженнях, якщо не потрібно великої точності, використовується С-шкала (Ю.И. Смирнов, М.М. Полевщиков, 2000):

$$C = 5 + 2Z . \quad (7.3)$$

При проведенні психологічних досліджень інтелекту застосовують шкалу Біне (И.В. Равич-Щербо, Т.М. Марютина, Е.Л. Грогоренко, 1999):

$$B = 100 + 16Z . \quad (7.4)$$

У низці шкіл Європи і США для градації оцінок використовують Н-шкалу (A.W. Burton, D.E. Miller, 1998):

$$H = 3 - Z . \quad (7.5)$$

У США при прийомі до вищих навчальних закладів використовується екзаменаційна Е-шкала (A.W. Burton, D.E. Miller, 1998):

$$E = 500 + 100Z . \quad (7.6)$$

До стандартних шкал можна віднести Z, T, C, B, H, E-шкали.

Перцентильна шкала (від англ. percent – процент). Перцентильна шкала побудована на визначенні перцентилей – певних інтервалів шкали. В її основу покладено таку систему нарахування балів: кожний спортсмен із групи одержує за свій результат (у тесті або змаганнях) стільки балів, скільки процентів учасників він випередив.

Перцентиль – це інтервал цієї шкали. При обстеженні 100 спортсменів в одному перцентилі один результат, при 50 – один результат укладається у два перцентилі. Перцентильні шкали визначаються, по суті, функцією нормального розподілу. Вони належать до сигмоподібних. Ці шкали достатньо наочні. Головна перевага перцентильної шкали – простота. Тут не потрібно розраховувати формули, а тільки визначати, яка кількість результатів спортсменів укладається в один перцентиль (або скільки перцентилей нараховується для однієї людини). Прості способи оцінки результатів та наочність перцентильної шкали зумовила її широке використання на практиці.

Шкала обраних точок. При розробці оцінних таблиць для видів спорту не завжди вдається одержати статистичний розподіл результатів тесту. Тоді роблять таке: беруть будь-який високий спортивний результат (це, як правило, світовий рекорд) і прирівнюють його до певної кількості балів (наприклад, до 1000). Потім, орієнтуючись на результати масових досліджень, середні результати групи слабо підготовлених в цьому виді спорту осіб прирівнюють, наприклад, до 100 балів. Після цього, якщо використовується пропорційна шкала, залишається виконати лише арифметичні обчислення, так позаяк дві точки однозначно визначають пряму лінію. Шкала, побудована у такий спосіб, називається шкалою обраних точок. Відзначимо, що такі шкали при побудові мають певний суб'єктивізм, який базується на думці спеціаліста.

Параметричні шкали. Ці шкали дають змогу визначити залежність між двома параметрами (наприклад, маса тіла – вага штанги в ривку і поштовху або довжина дистанції – час у різних видах циклічних вправ). Шкали, побудовані у відповідній залежності, називаються параметричними і належать до числа найбільш точних.

Шкала ДЦОЛІФКа. У багатьох випадках при повторному тестуванні не вдається забезпечити однакові умови (змінюються, наприклад, кількість учасників тестування, кліматичні умови, профіль дистанції та ін.). До того ж тренери стикаються ще з однією проблемою – необхідністю оцінки результатів періодичного тестування одного й того ж самого спортсмена в різний час біологічного циклу або етапу підготовки. Для цього запропонована шкала ДЦОЛІФКа, яка виражена у формулі:

$$\text{Оцінка, бали} = 100 \cdot \left(1 - \frac{\text{кращий результат} - \text{оцінюваний результат}}{\text{кращий результат} - \text{гірший результат}} \right) \quad (7.7)$$

Зміст цього підходу передбачає, що результат тесту розглядається не як відокремлена величина, а у зв'язку з кращим і гіршим результатами, показаними в цьому тесті спортсменом. Як бачимо із формули, кращий результат завжди оцінюється в 100 балів, гірший – в 0. Цю шкалу доцільно застосовувати для оцінки варіативних показників.

Отже, за шкалою відбувається ДЦОЛІФКа встановлення взаємозв'язку між кращим і гіршим результатом тесту.

Розв'язання типових задач і вправ

Приклад 7.1. Відомо результати тестування учнів у стрибках в довжину з місця:

$$x_i \sim 220; 230; 245; 260; 210; 245; 235.$$

Використовуючи стандартні шкали визначити кількість очок, які набрали учні.

Розв'язування.

Визначаємо середнє значення стрибка в довжину з місця $\bar{x}$ і середнє квадратичне відхилення σ :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} = \frac{220 + 230 + 245 + 260 + 210 + 245 + 235}{7} = 235; \\ \sigma &= \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}} = \sqrt{\frac{(220 - 235)^2 + (230 - 235)^2 + (245 - 235)^2 +}{7 - 1} +} \\ &\quad + \frac{(260 - 235)^2 + (210 - 235)^2 + (245 - 235)^2 + (235 - 235)^2}{7 - 1} = 16,8. \end{aligned}$$

Обчислюємо набрані очки у Z-шкалі:

$$\begin{aligned}
 Z_1 &= \frac{x_1 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{220 - 235}{16,8} = -0,89; & Z_2 &= \frac{x_2 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{230 - 235}{16,8} = -0,29; \\
 Z_3 &= \frac{x_3 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{245 - 235}{16,8} = 0,59; & Z_4 &= \frac{x_4 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{260 - 235}{16,8} = 1,49; \\
 Z_5 &= \frac{x_5 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{210 - 235}{16,8} = -1,49; & Z_6 &= \frac{x_6 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{245 - 235}{16,8} = 0,59; \\
 Z_7 &= \frac{x_7 - \bar{x}}{\sigma} = \frac{235 - 235}{16,8} = 0.
 \end{aligned}$$

Обчислюємо набрані очки у T-шкалі:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= 50 + 10 \cdot Z_1 = 50 + 10 \cdot (-0,89) = 41,1; \\
 T_2 &= 50 + 10 \cdot Z_2 = 50 + 10 \cdot (-0,29) = 47,1; \\
 T_3 &= 50 + 10 \cdot Z_3 = 50 + 10 \cdot 0,59 = 55,9; \\
 T_4 &= 50 + 10 \cdot Z_4 = 50 + 10 \cdot 1,49 = 64,9; \\
 T_5 &= 50 + 10 \cdot Z_5 = 50 + 10 \cdot (-1,49) = 35,1; \\
 T_6 &= 50 + 10 \cdot Z_6 = 50 + 10 \cdot 0,59 = 55,9; \\
 T_7 &= 50 + 10 \cdot Z_7 = 50 + 10 \cdot 0 = 50.
 \end{aligned}$$

Обчислюємо набрані очки у C-шкалі:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= 5 + 2 \cdot Z_1 = 5 + 2 \cdot (-0,89) = 3,22; & C_2 &= 5 + 2 \cdot Z_2 = 5 + 2 \cdot (-0,29) = 4,42; \\
 C_3 &= 5 + 2 \cdot Z_3 = 5 + 2 \cdot 0,59 = 6,18; & C_4 &= 5 + 2 \cdot Z_4 = 5 + 2 \cdot 1,49 = 7,98; \\
 C_5 &= 5 + 2 \cdot Z_5 = 5 + 2 \cdot (-1,49) = 2,02; & C_6 &= 5 + 2 \cdot Z_6 = 5 + 2 \cdot 0,59 = 6,18; \\
 C_7 &= 5 + 2 \cdot Z_7 = 5 + 2 \cdot 0 = 5.
 \end{aligned}$$

Обчислюємо набрані очки у шкалі Біне:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= 100 + 16 \cdot Z_1 = 100 + 16 \cdot (-0,89) = 85,76; \\
 B_2 &= 100 + 16 \cdot Z_2 = 100 + 16 \cdot (-0,29) = 95,36; \\
 B_3 &= 100 + 16 \cdot Z_3 = 100 + 16 \cdot 0,59 = 109,44; \\
 B_4 &= 100 + 16 \cdot Z_4 = 100 + 16 \cdot 1,49 = 123,84; \\
 B_5 &= 100 + 16 \cdot Z_5 = 100 + 16 \cdot (-1,49) = 76,16; \\
 B_6 &= 100 + 16 \cdot Z_6 = 100 + 16 \cdot 0,59 = 109,44; \\
 B_7 &= 100 + 16 \cdot Z_7 = 100 + 16 \cdot 0 = 100.
 \end{aligned}$$

Обчислюємо набрані очки у Н-шкалі:

$$H_1 = 3 - Z_1 = 3 - (-0,89) = 3,89; H_2 = 3 - Z_2 = 3 - (-0,29) = 3,29;$$

$$H_3 = 3 - Z_3 = 3 - 0,59 = 2,41; H_4 = 3 - Z_4 = 3 - 1,49 = 1,51;$$

$$H_5 = 3 - Z_5 = 3 - (-1,49) = 4,49; H_6 = 3 - Z_6 = 3 - 0,59 = 2,41;$$

$$H_7 = 3 - Z_7 = 3 - 0 = 3.$$

Обчислюємо набрані очки у Е-шкалі:

$$E_1 = 500 + 100 \cdot Z_1 = 500 + 100 \cdot (-0,89) = 411;$$

$$E_2 = 500 + 100 \cdot Z_2 = 500 + 100 \cdot (-0,29) = 471;$$

$$E_3 = 500 + 100 \cdot Z_3 = 500 + 100 \cdot 0,59 = 559;$$

$$E_4 = 500 + 100 \cdot Z_4 = 500 + 100 \cdot 1,49 = 649;$$

$$E_5 = 500 + 100 \cdot Z_5 = 500 + 100 \cdot (-1,49) = 351;$$

$$E_6 = 500 + 100 \cdot Z_6 = 500 + 100 \cdot 0,59 = 559;$$

$$E_7 = 500 + 100 \cdot Z_7 = 500 + 100 \cdot 0 = 500.$$

Висновок: зведені результати набраних очок у різних шкалах представлено в таблиці:

№ з/п	Результат х, см	Z-шкала	T-шкала	C-шкала	Шкала Біне	Н-шкала	Е-шкала
1	220	-0,89	41,1	3,22	85,76	3,89	411
2	230	-0,29	47,1	4,42	95,36	3,29	471
3	245	0,59	55,9	6,18	109,44	2,41	559
4	260	1,49	64,9	7,98	123,84	1,51	649
5	210	-1,49	35,1	2,02	76,16	4,49	351
6	245	0,59	55,9	6,18	109,44	2,41	559
7	235	0	50	5	100	3	500

Приклад 7.2. Використовуючи шкалу перцентилей, визначити кількість очок, які набрали студенти за результатами тесту з підтягування:

$x_i \sim 20; 13; 14; 16; 19; 17; 15; 18; 12; 15.$

Розв'язування.

Визначаємо, скільки відсотків припадає на одного учасника тестування:

$$\frac{100\%}{n} = \frac{100\%}{10} = 10\%.$$

Отже, студент, що підтягнувся 20 разів випередив 90 % учасників тестування, тому і набрав 90 очок. Решту результати представлені у таблиці:

№ з/п	Результат підтягування, x_i	Ранг	Очки
1	20	1	90
2	13	9	10
3	14	8	20
4	16	5	50
5	19	2	80
6	17	4	60
7	15	6	35
8	18	3	70
9	12	10	0
10	15	6	35

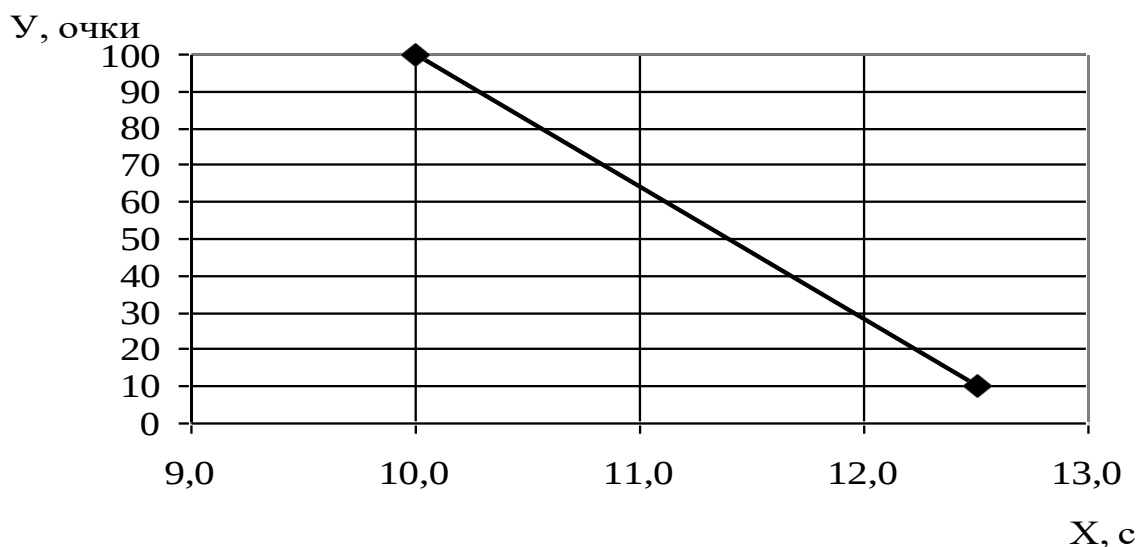
Висновок: представлені у таблиці результати показують, що студент, який показав найкращий результат – випередив усіх, тобто

90 % учасників тестування. Учасник № 9 показав найнижчий результат і не випередив нікого, тому отримав 0 очок. Всі решту отримали стільки очок, скільки відсотків учасників вони випередили.

Приклад 7.3. У групі спортсменів під час бігу на 100 м результат 10,0 с оцінювався у 100 очок, а найгірший 12,5 с – у 10 очок. Використовуючи шкалу обраних точок, визначити кількість набраних очок за результат 11,2 с.

Розв'язування.

Будуємо графік шкали вибраних точок:



Рівняння прямої у загальному вигляді $y = k \cdot x + b$ повинно задовольняти обидві обрані точки. Тому маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y_1 = k \cdot x_1 + b \\ y_2 = k \cdot x_2 + b \end{cases},$$

де y_1 та y_2 – найбільша та найменша кількість очок даної шкали;
 x_1 та x_2 – найкращий та найгірший результати у бігу на 100 м.
 Розв'язавши цю систему рівнянь, отримаємо:

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2};$$

$$b = y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1$$

Кількість очок, нарахованих за результат 11,2 с визначаємо із співвідношення:

$$\begin{aligned} y &= k \cdot x + b = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x + y_1 - \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot x_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot (x - x_1) + y_1 = \\ &= \frac{100 - 10}{10,0 - 12,5} \cdot (11,2 - 10,0) + 100 = 56,8. \end{aligned}$$

Висновок: за результат 11,2 с у шкалі обраних точок за даних умов необхідно нарахувати 56,8 очок.

Приклад 7.4. Під час тестування у штовханні ядра зафіксовано найкращий і найгірший результати – 18,5 м та 11,0 м відповідно. Визначити, яку кількість очок необхідно нарахувати спортсмену за результат 14,5 м.

Розв'язування

Для нарахування очок варто використати шкалу ДЦОЛІФКа.

$$x = 100 \cdot \left(1 - \frac{x_{\max} - x}{x_{\max} - x_{\min}} \right) = 100 \cdot \left(1 - \frac{18,5 - 14,5}{18,5 - 11,0} \right) \approx 46,6.$$

Висновок: за результат 14,5 м у шкалі ДЦОЛІФКа за даних умов нараховується 46,6 очка.

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 7.1. Відомі результати тестування у стрибках в довжину з розбігу:

$$x_i \sim 620; 630; 645; 560; 710; 590; 635; 670; 610; 660.$$

Визначити кількість набраних очок у таких шкалах:

- а) Z-шкалі;
- б) Т-шкалі;
- в) С-шкалі;
- г) шкалі Біне;
- д) Н-шкалі;
- е) Е-шкалі.

№ 7.2. Відомі результати тестування у стрибках у висоту з розбігу:

$x_i \sim 190; 205; 195; 210; 200; 180; 170; 200; 205; 160.$

Визначити кількість набраних очок у таких шкалах:

- а) Z-шкалі;
- б) Т-шкалі;
- в) С-шкалі;
- г) шкалі Біне;
- д) Н-шкалі;
- е) Е-шкалі.

№ 7.3. Відомі результати тестування у згинанні та розгинанні рук в упорі лежачи:

$x_i \sim 20; 30; 45; 50; 33; 29; 35; 32; 29; 26.$

Визначити кількість набраних очок у таких шкалах:

- а) Z-шкалі;
- б) Т-шкалі;
- в) С-шкалі;
- г) шкалі Біне;
- д) Н-шкалі;
- е) Е-шкалі.

№ 7.4. Відомі результати тестування у метанні списа:

$x_i \sim 62; 53; 64; 60; 71; 59; 48; 56; 41; 46.$

Визначити кількість набраних очок у таких шкалах:

- а) Z-шкалі;
- б) Т-шкалі;
- в) С-шкалі;
- г) шкалі Біне;
- д) Н-шкалі;
- е) Е-шкалі.

№ 7.5. Використовуючи шкалу перцентилей, визначити кількість очок, які набрали студенти за результатами тесту у бігу на 100 м:

$x_i \sim 12,5; 13,0; 14,0; 13,3; 12,8; 13,1; 13,5; 13,8; 12,7; 14,5.$

№ 7.6. Використовуючи шкалу перцентилей, визначити кількість очок, які набрали юнаки за результатами кросу із загальним стартом на 3 000 м:

$x_i \sim 12,51; 13,00; 14,20; 13,30; 12,10; 10,15; 10,55; 9,55; 12,35; 14,15.$

№ 7.7. Використовуючи шкалу перцентилей, визначити кількість очок, які набрали учні за результатами тесту з метання м'ячика на дальність:

$x_i \sim 47; 33; 44; 36; 38; 39; 42; 31; 40; 35.$

№ 7.8. Використовуючи шкалу обраних точок, визначити кількість набраних очок у метанні списа за результат 51,2 м. Вважати, що результат 70,0 м оцінювався у 100 очок, а 40,5 м – у 10.

№ 7.9. Використовуючи шкалу обраних точок, визначити кількість набраних очок у підтягування за результат 17 разів. Вважати, що результат 28 раз оцінювався у 100 очок, а 16 разів – у 10.

№ 7.10. Використовуючи шкалу обраних точок, визначити кількість набраних очок у метанні гранати за результат 45,2 м. Вважати, що результат 50,0 м оцінювався у 100 очок, а 30,5 м – у 10.

№ 7.11. Використовуючи шкалу обраних точок, визначити кількість набраних очок у потрійному стрибку за результат 13,2 м. Вважати, що результат 17,5 м оцінювався у 100 очок, а 12,5 м – у 10.

№ 7.12. Використовуючи шкалу ДЦОЛІФКа, визначити кількість набраних очок у метанні диска за результат 71,2 м. Вважати найвищим результат 90,0 м, а найнижчим – 60,0 м.

№ 7.13. Використовуючи шкалу ДЦОЛІФКа, визначити кількість набраних очок у підтягуванні за результат 16 разів. Вважати, найвищим результат 33 рази, а найнижчим – 10.

№ 7.14. Використовуючи шкалу ДЦОЛІФКа, визначити кількість набраних очок у стрибках у висоту з жердиною за результат 5,95 м. Вважати, найвищим результат 6,15 м, а найнижчим – 5,60 м.

№ 7.15. Використовуючи шкалу ДЦЛОІФКа, визначити кількість набраних очок у бігу на 100 м за результат 10,2 с. Вважати найвищим результат 9,8 с, а найнижчим – 13,0 с.

Контрольні питання

1. Що називається педагогічною оцінкою?
2. Що таке оцінювання?
3. Характеристика пропорційної шкали.
4. Характеристика регресуючої шкали.
5. Характеристика прогресуючої шкали.
6. Характеристика сигмоподібної (або S-подібної) шкали.
7. Стандартна шкала та її характеристика.
8. Перцентильна шкала та її характеристика.
9. Шкала обраних точок та її характеристика.
10. Шкала ДЦОЛІФКа та її характеристика.

8. Кількісна оцінка якісних показників

Теоретичні відомості

Для визначення якості результатів у багатьох видах фізичних вправ застосовуються положення кваліметрії – науки, що вимірює якість. Під час розробки і застосування систем оцінювання якісних характеристик необхідно дотримуватись основних принципів кваліметрії.

Перший принцип полягає у необхідності побудови ієрархічної структури якості, яка вимірюється, і визначення окремих властивостей цієї якості. Така ієрархічна структура повинна складатися з певної кількості рівнів властивостей означеної якості (рис. 9.1). Якість складається із властивостей рівня А, властивості рівня А складаються із властивостей рівня В і т.д. При цьому бажано розкласти якість до такого рівня, на якому знаходяться властивості, що не підлягають подальшому розкладенню.

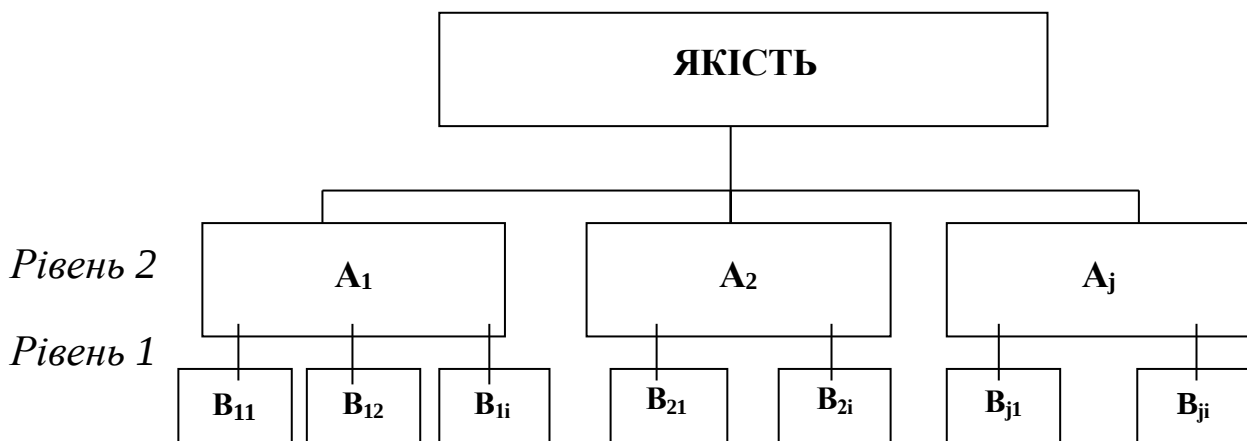


Рис. 9.1. Ієрархічна структура якості, що вимірюється.

Другий принцип полягає у тому, що кожна властивість, яка складає якість, повинна визначатися двома числовими показниками:

- 1) показником міри виразності даної властивості (M_i);
- 2) показником вагомості означених властивості серед інших властивостей цього рівня (A_i); показники вагомості властивостей одного рівня характеризуються насамперед силою впливу останніх на властивість більш високого рівня, яку вони складають, і на якість у цілому.

Отже, добуток цих двох показників дає характеристику кожної властивості, "зважену" згідно з значущістю цієї властивості для утворення властивості більш високого рівня, і водночас – якості загалом.

Таким чином, оцінка якості окремого j -го компонента на рівні 1 визначається зі співвідношення:

$$O_{ij} = M_{ij} \cdot A_{ij} \quad (8.1),$$

де: O_{ij} – оцінка якості окремого j -го компонента на рівні 1;

M_{ij} – кількісний показник виразності певної властивості на рівні 1;

A_{ij} – коефіцієнт вагомості даної властивості серед властивостей рівня 1.

Тоді оцінка якості j -го компонента на рівні 2 обчислюється за формулою:

$$O_j = \sum_{i=1}^n M_{ij} A_{ij} \quad (8.2).$$

Третій принцип вимагає, щоб для визначення міри виразності властивостей використовувалась шкала відносних показників. Це дає змогу після переведу абсолютних значень різних властивостей, виражених у різних шкалах, у відносні показники однієї шкали порівнювати їх між собою (з урахуванням показників вагомості) і виконувати з ними математичні дії, що є необхідними для визначення властивості більш високого рівня. З цією метою при визначенні якості певної величини з успіхом може застосовуватися досить відома людству процентна (100-бальна) шкала відносних показників.

Згідно з *четвертим принципом*, сума показників вагомості властивостей одного рівня повинна бути величиною постійною. Це дає змогу "зважувати" ступінь впливу кожної властивості цього рівня на властивість більш високого рівня, що їх узагальнює. Найбільш зручним значенням такої суми нам видається "одиниця», тобто:

$$\sum_{i=1}^n A_{ij} = 1 \quad (8.3).$$

Співвідношення (9.3) називаються умовою нормування. Ця величина значно спрощує подальші розрахунки і є дуже наочною.

Визначення коефіцієнтів вагомості окремих елементів складної якості тощо є можливим тільки на основі експертних оцінок, отриманих шляхом експертного опитування.

П'ятий принцип полягає у тому, що для визначення комплексної оцінки якості загалом необхідно провести згортання показників, які характеризують властивості, що складають ієрархічну структуру якості. Так, наприклад, оцінка якості загалом визначається у такий спосіб:

$$O = \sum_{j=1}^m O_j A_j, \quad (8.4)$$

де m – кількість елементів, які складають якість в цілому і підлягають контролю та оцінюванню;

A_j – коефіцієнт вагомості властивості даного елементу серед властивостей рівня 2.

Умова нормування має вигляд:

$$\sum_{j=1}^m A_j = 1. \quad (8.5)$$

Таким чином, вищезгадані п'ять кваліметричних принципів передбачають певний комплекс технологічних операцій, а також вимог щодо оцінки якості. Вони є основними постулатами кваліметрії стосовно процедури оцінювання якості.

У спортивній кваліметрії можуть використовуватися методи анкетування, експертних оцінок та інструментальні.

Анкетування – це статистичний метод, суть якого полягає у виявленні думок людей (*респондентів*) про досліджуваний об'єкт безпосередньо через заповнення анкет.

Анкета – це собою опитувальний лист, до якого вносяться відповіді респондентів на поставленні запитання. Запитання в анкеті повинні бути короткими і зрозумілими респонденту. Анкета складається із двох частин: демографічної і основної.

Демографічна містить запитання, які характеризують особистість респондента: ім'я, вік, стать, соціальний стан та ін.

Основна частина складається із запитань, відповіді на які дозволяють розв'язати головне завдання дослідження.

Вид анкетування визначається характером запитань.

Пряме анкетування включає запитання, які вимагають прямих відповідей про об'єкт дослідження.

Безумовне анкетування містить запитання, які передбачають прямі відповіді без будь-яких умов.

Умовне анкетування включає питання, відповіді на які вимагають дотримання певних умов.

Відкрите анкетування передбачає такі запитання, відповіді на які не мають ніяких обмежень.

Закрите анкетування містить питання, які перераховують можливі відповіді.

Очне анкетування можливе при заповненні анкети респондентом у присутності дослідника.

Заочне анкетування передбачає заповнення анкети на розсуд респондента.

Персональне анкетування передбачає під час заповнення анкети внесення паспортних даних респондента.

Анонімне анкетування проводиться без запису персональних даних, що дозволяє респонденту біти цілком відвертим у відповідях на будь-які запитання.

Після проведення анкетування відбувається підрахунок голосів респондентів, тобто підбиваються підсумки анкетування. При цьому отримані дані заносять у спеціальні таблиці, будують гістограми та діаграми і роблять висновки про досліджуваний об'єкт.

Метод експертних оцінок передбачає вимірювання якісних характеристик фахівцями-експертами за допомогою спеціально обраної шкали. Експертами виступають високопрофесійні фахівці, які досконало знають об'єкт дослідження.

Експерти повинні відповідати таким вимогам:

- високий рівень професіоналізму;
- незаангажованість та послідовність у своїх рішеннях;
- психологічна стійкість.

Якість експертів визначається такими способами:

- евристичними оцінками (свою професійну компетентність експерт оцінює сам, а також інші експерти);

– статистичними оцінками (визначається відхилення індивідуальної експертної оцінки від колективної статистичними методами);

– тестовими оцінками (передбачається оцінка експерта за результатом виконання спеціальних тестових завдань);

– документальним оцінками (базуються на основі документальних даних про експерта);

– комбінованими оцінками (узагальнювальна оцінка здійснюється на основі сукупності перелічених методів).

Реалізація методу експертних оцінок трактується як експертиза, оскільки для його реалізації використовують декілька експертів.

Якщо думки експертів збігаються, то вважають що експертиза відбулася, якщо ж думки є діаметрально протилежні – експертиза вважається такою, що не відбулася.

Існує багато способів проведення експертизи. Найпростішим є *метод переваг*, у якому експерти розставляють оцінювані об'єкти за рангами у порядку погіршення їх якості. Місце, зайняте кожним об'єктом, визначається сумою набраних балів (див. *приклад 8.1*).

З точки зору методики проведення опитувань експертів на сучасному етапі одним із найдосконаліших вважається *метод Дельфи*.

Характерні риси методу Дельфи:

1. Відповіді на поставлені перед експертами питання обов'язково містять кількісну характеристику.

2. Проводиться декілька турів опитування.

3. Після кожного туру всі опитувані експерти знайомляться з відповідями інших учасників опитування.

4. Від експертів отримують обґрунтування їх думки і воно доводиться до відома інших учасників експертизи.

5. Статистична обробка отриманих відповідей проводиться після кожного туру.

Таким чином, призначення методу Дельфи полягає у виявленні з якого-небудь питання переважної думки фахівців у обстановці, що виключає їх прямі дебати між собою, але водночас дозволяє знову і знову зважувати свої судження із врахуванням відповідей і аргументів колег.

Кількість турів опитування значною мірою залежить від кваліфікації фахівців. Вважається, що для 10 – 12 експертів достатньо біля трьох турів опитування.

Безпосереднє оцінювання здійснюється експертами у шкалі 0÷10 балів (0÷20 балів та інші подібні шкали) з градацією у 0,5 бала. Значення 0 свідчить про відсутність досліджуваної ознаки, а верхня межа шкали – 10 балів (20 та ін.) відповідає найвищому можливому значенню параметру. Характерною особливістю процесу оцінювання є його двоопераційність. Спочатку експерти надають запропонованим об'єктам певний ранг, а потім оцінюють їх методом послідовних порівнянь (за 10-бальною шкалою з градацією 0,5 бала). Використовуючи подібну шкалу, експерт повинен приписати кожній ознаці якесь числове значення P_{ij} у межах використовуваної бальної шкали. Після цього визначають коефіцієнт вагомості за формулою:

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^N P_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^N P_{ij}}. \quad (8.6)$$

Узгодженість оцінок експертів. Ступінь співпадіння думок експертів визначається за допомогою коефіцієнта конкордації:

$$W = \frac{S}{\frac{1}{12} N^2 (n^3 - n) - N \sum_{j=1}^P T_j^3}, \quad (8.7)$$

$$\text{де } T_j = \frac{1}{12} \sum_{\gamma=1}^P (t_{j\gamma}^3 - t_{j\gamma}), \quad (8.8)$$

при цьому: S – сума квадратів відхилень сум рангів;

N – кількість експертів;

P – число груп однакових рангів при ранжуванні j -го експерта;

$t_{j\gamma}$ – число повторень однакового рангу в γ – групі у j -го експерта.

Розв'язання типових задач і вправ

Приклад 8.1. Результати оцінювання виступу групи спортсменів методом переваг представлено у таблиці.

Номер спортсмена, <i>m</i>	Номер експерта, <i>n</i>				
	1	2	3	4	5
1	2	1	2	3	2
2	3	3	3	2	3
3	1	2	1	1	1
4	4	5	5	4	4
5	6	4	4	5	6
6	5	6	6	6	5

Визначити підсумкові місця, зайняті кожним спортсменом.

Розв'язування.

Визначаємо суму балів, яку набрав кожний спортсмен.

На основі отриманих результатів проводимо ранжування місць.
Остаточні результати предсталено у таблиці:

Номер спортсмена, <i>m</i>	Номер експерта, <i>n</i>					Сума балів	Місце
	1	2	3	4	5		
1	2	1	2	3	2	10	V
2	3	3	3	2	3	14	IV
3	1	2	1	1	1	6	VI
4	4	5	5	4	4	22	III
5	6	4	4	5	6	25	II
6	5	6	6	6	5	28	I

Приклад 8.2. Для визначення коефіцієнтів вагомості окремих помилок під час виконання технічних прийомів волейболу A_j застосовувався метод експертних оцінок. У таблиці представлено результати експертної оцінки значущості ймовірних помилок стійки гравця.

Експерт	Значущість помилки				
	неправильна постановка ніг P_{1j}	прямі ноги P_{2j}	прямий тулуб P_{3j}	вільно опущені руки P_{4j}	вага тіла на ноги розподілена нерівномірно P_{5j}
1	7,0	10,0	6,0	8,5	5,0
2	7,5	10,0	5,0	9,0	5,5
3	6,0	10,0	5,0	9,0	4,0
4	7,0	10,0	6,0	8,0	5,0
5	6,0	10,0	5,0	8,0	4,0
6	7,0	10,0	5,0	9,0	5,0
7	6,0	10,0	5,5	8,5	5,0
8	6,0	10,0	5,0	9,0	5,5
9	7,0	10,0	5,0	9,0	6,0
10	7,0	10,0	6,0	8,5	5,0

Визначити коефіцієнти вагомості A_j ймовірних помилок стійки волейболіста.

Розв'язування.

Визначаємо коефіцієнти вагомості A_j ймовірних помилок стійки баскетболіста у відносній шкалі.

$$\text{Неправильна постановка ніг: } A_{1-\frac{5}{10}} = \frac{\sum_{j=1}^{10} P_{1j}}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} P_{ij}} = \frac{66,5}{356,5} = 0,19.$$

$$\text{Прямі ноги: } A_{2-\frac{5}{10}} = \frac{\sum_{j=1}^{10} P_{2j}}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} P_{ij}} = \frac{100}{356,5} = 0,28.$$

Прямий тулуб: $A_3 = \frac{\sum_{j=1}^{10} P_{1j}}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} P_{ij}} = \frac{53,5}{356,5} = 0,15.$

Вільно опущені руки: $A_4 = \frac{\sum_{j=1}^{10} P_{1j}}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} P_{ij}} = \frac{86,5}{356,5} = 0,24.$

Вага тіла на ноги розподілена нерівномірно: $A_5 = \frac{\sum_{j=1}^{10} P_{1j}}{\sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^{10} P_{ij}} = \frac{50}{356,5} = 0,14.$

Для визначення коефіцієнтів вагомості помилок у 12-бальній шкалі необхідно отримані значення перемножити на 12.

Одержані результати представлено у таблиці:

Коефіцієнти вагомості ймовірних помилок стійки гравця

Помилка	Коефіцієнти вагомості для різних шкал оцінювання A_{ij}		
	відносна	12-бальна	100-бальна
неправильна постановка ніг	0,19	2,3	19
прямі ноги	0,28	3,4	28
прямий тулуб	0,15	1,8	15
вільно опущені руки	0,24	2,9	24
вага тіла на ноги розподілена нерівномірно	0,14	1,6	14

Задачі і вправи для аудиторної і домашньої роботи

№ 8.1. Результати оцінювання виступу групи спортсменів методом переваг представлено у таблиці.

Номер спортсмена, <i>m</i>	Номер експерта, <i>n</i>		
	1	2	3
1	3	1	2
2	1	3	3
3	1	2	1
4	4	4	6
5	5	6	4
6	6	5	5

Визначити підсумкові місця, зайняті кожним спортсменом.

№ 8.2. Результати оцінювання виступу групи спортсменів методом переваг представлено у таблиці.

Номер спортсмена, <i>m</i>	Номер експерта, <i>n</i>				
	1	2	3	4	5
1	3	1	2	3	4
2	1	3	3	2	2
3	1	2	1	1	1
4	4	4	6	4	3
5	6	6	4	5	6
6	5	5	5	6	5

Визначити підсумкові місця, зайняті кожним спортсменом.

№ 8.106. Для визначення коефіцієнтів вагомості окремих помилок під час виконання технічних прийомів баскетболу A_j метод експертних оцінок. У таблиці представлено результати експертної оцінки значущості ймовірних помилок під час зупинки двома кроками.

Експерт	Значущість помилки					
	передостанній крок не виконується коротшим P_{1j}	останній крок не виконується подовженим P_{2j}	надмірний нахил тулуба вперед P_{3j}	ступні розміщені на одній фронтальній лінії P_{4j}	вага тіла на ноги розподілена нерівномірно P_{5j}	не виконується прикриття м'яча у завершальній фазі P_{6j}
1	6,0	10,0	9,0	4,0	3,0	2,0
2	7,5	10,0	9,0	4,0	3,0	2,0
3	7,0	10,0	10,0	4,0	4,0	2,5
4	7,0	10,0	9,0	5,0	3,0	2,0
5	7,5	9,5	10,0	4,0	3,0	1,5
6	8,0	10,0	9,5	4,0	3,0	2,0
7	6,5	10,0	10,0	4,5	3,0	2,0
8	7,5	10,0	9,0	3,5	4,0	2,0
9	8,0	10,0	9,0	4,5	3,0	2,0
10	8,0	10,0	9,0	4,0	3,5	1,5

Визначити коефіцієнти вагомості A_j ймовірних помилок баскетболіста під час зупинки двома кроками.

№ 8.107. Для визначення коефіцієнтів вагомості окремих помилок під час виконання технічних прийомів баскетболу A_j метод експертних оцінок. У таблиці представлено результати експертної оцінки значущості ймовірних помилок під час ловіння м'яча двома руками.

Експерт	Значущість помилки						
	руки недостатньо випрямлені назустріч м'ячу P_{1j}	м'яч прийнято долонями P_{2j}	неправильний хват м'яча P_{3j}	відсутнє пружне згинання рук і підтягування м'яча до грудей P_{4j}	неузгоджена робота рук і ніг P_{5j}	передчасне відведення погляду від м'яча P_{6j}	не виконується прикриття м'яча у завершальній фазі P_{7j}
1	6,0	9,0	10,0	8,0	7,0	2,5	2,0
2	6,5	9,5	10,0	7,5	8,0	2,0	1,5
3	6,0	10,0	8,0	8,5	7,5	2,5	2,0
4	6,0	9,0	10,0	8,0	7,0	3,0	2,5
5	6,5	10,0	9,0	7,5	7,0	1,5	2,0
6	7,0	9,5	10,0	8,0	7,5	2,0	2,5
7	6,5	10,0	9,5	7,0	8,0	2,0	3,0
8	7,5	10,0	9,5	8,5	8,0	2,5	2,5
9	7,0	10,0	9,0	8,0	7,0	2,0	2,5
10	7,5	9,5	10,0	8,0	7,5	2,5	2,0

Визначити коефіцієнти вагомості A_j ймовірних помилок баскетболіста під час ловіння м'яча двома руками.

№ 8.108. Для визначення коефіцієнтів вагомості окремих помилок під час виконання технічних прийомів баскетболу A_j метод експертних оцінок. У таблиці представлено результати експертної оцінки значущості ймовірних помилок під час передач м'яча однією рукою від плеча.

Експерт	Значущість помилки					
	неправильне вихідне положення ніг P_{1j}	неправильний хват м'яча P_{2j}	рука відведена занадто в сторону або високо P_{3j}	неузгоджена робота рук і ніг P_{4j}	неповне випрямлення руки у ліктьовому суглобі P_{5j}	відсутнє супроводження м'яча P_{6j}
1	8,0	10,0	3,0	9,0	4,0	6,0
2	7,0	10,0	3,5	9,0	5,0	6,5
3	7,0	9,0	4,0	10,0	5,0	6,0
4	8,5	10,0	4,0	9,0	4,5	6,0
5	7,5	9,0	3,5	10,0	4,0	5,5
6	8,0	10,0	4,0	9,0	5,0	7,0
7	7,5	9,0	4,0	10,0	4,5	6,0
8	8,0	9,0	3,5	10,0	4,0	6,0
9	8,0	9,0	3,0	10,0	4,0	6,5
10	8,0	10,0	3,5	9,0	4,0	7,0

Визначити коефіцієнти вагомості A_j ймовірних помилок баскетболіста під час передач м'яча однією рукою від плеча.

Контрольні питання

1. Що вивчає кваліметрія?
2. У чому суть першого принципу кваліметрії?
3. У чому суть другого принципу кваліметрії?
4. У чому суть третього принципу кваліметрії?
5. У чому суть четвертого принципу кваліметрії?
6. У чому суть п'ятого принципу кваліметрії?
7. Характеристика методу анкетування.
8. Метод експертних оцінок.
9. Що таке коефіцієнт вагомості?
10. Коефіцієнт конкордації.

Додаток

Випадкові числа

Таблиця Д 1.1.

2057	0762	1429	8535	9029	9745	3458	5023	3502	2436
6435	2646	0295	6177	2755	3080	3275	0521	6623	1133
3278	0500	7573	7426	3188	0187	7707	3047	4901	3519
7888	6411	1631	6981	1972	4269	0022	3860	1580	6751
4022	6540	7804	5528	4690	3586	9839	6641	0404	0735
0888	3504	2651	9051	5764	7155	6489	2660	3341	8784
0605	4640	8692	7712	9832	6607	0480	2557	3461	9755
4398	8857	0221	3844	1823	4407	5914	7545	2362	2428
7899	2623	9965	7366	0486	8185	5896	3985	3105	7210
5375	2213	8481	0919	2350	7310	7106	0046	1683	6269
1120	5436	8921	6457	8361	9849	9902	4244	2377	9213
4625	5978	5266	7521	8488	6854	9203	2598	2673	2399
5112	4318	5003	3532	6430	5679	5041	2108	1813	4235
3915	9380	3918	5957	3603	6553	6247	8907	5282	1106
9223	5629	6982	4138	2901	7592	1650	2580	5676	6470
0122	0820	2140	5291	8499	3653	1727	0453	3032	2902
4114	2462	2820	0414	7197	3854	2940	3500	8685	6131
0774	7788	5011	4971	0848	0748	7103	3262	5182	1185
1493	3425	0114	4662	0802	1125	8745	5513	9750	0695
5727	7577	8631	0759	5430	9953	1426	0405	2109	2304
5329	2475	8555	8172	1376	3459	6778	6917	0159	9635
7058	4886	2373	5937	9383	5763	8004	8602	2457	9134
0099	2200	2369	8140	4865	4874	4867	5206	0434	3845
0659	0499	3671	2771	2104	9275	2118	8024	1033	0528

Критичні значення t -критерію Стюдента

Число ступенів свободи k	Рівень значущості		
	$P=0,95$	$P=0,99$	$P=0,999$
1	2	3	4
1	12,70	63,65	636,61
2	4,303	9,925	31,602
3	3,182	5,841	12,923
4	2,776	4,604	8,610
5	2,571	4,032	6,869
6	2,447	3,707	5,959
7	2,365	3,499	5,408
8	2,306	3,355	5,041
9	2,262	3,250	4,781
10	2,228	3,169	4,587
11	2,201	3,106	4,437
12	2,179	3,055	4,318
13	2,160	3,012	4,221
14	2,145	2,977	4,140
15	2,131	2,947	4,073
16	2,120	2,921	4,015
17	2,110	2,898	3,965
18	2,101	2,878	3,922
19	2,093	2,861	3,883
20	2,086	2,845	3,850
21	2,080	2,831	3,819
22	2,074	2,819	3,792
23	2,069	2,807	3,768
24	2,064	2,797	3,745
25	2,060	2,787	3,725
26	2,056	2,779	3,707
27	2,052	2,771	3,690
28	2,049	2,763	3,674
29	2,045	2,756	3,659
30	2,042	2,750	3,646
31	2,040	2,744	3,633
32	2,037	2,738	3,622
33	2,035	2,733	3,611
34	2,032	2,728	3,601
35	2,030	2,724	3,591
36	2,028	2,719	3,582
37	2,026	2,715	3,574
38	2,024	2,712	3,566
39	2,023	2,708	3,558
40	2,021	2,704	3,551
41	2,020	2,701	3,544
42	2,018	2,698	3,538
43	2,017	2,695	3,532

(Продовження таблиці Д 1.2)

44	2,015	2,692	3,526
45	2,014	2,690	3,520
46	2,013	2,687	3,515
47	2,012	2,685	3,510
48	2,011	2,682	3,505
49	2,010	2,680	3,500
50	2,009	2,678	3,496
51	2,008	2,676	3,492
52	2,007	2,674	3,488
53	2,006	2,672	3,484
54	2,005	2,670	3,480
55	2,004	2,688	3,476
56	2,003	2,667	3,473
57	2,002	2,665	3,470
58	2,002	2,663	3,466
59	2,001	2,662	3,463
60	2,000	2,660	3,460
61	2,000	2,659	3,457
62	1,999	2,657	3,454
63	1,998	2,656	3,452
64	1,998	2,655	3,449
65	1,997	2,654	3,447
66	1,997	2,652	3,444
67	1,996	2,651	3,442
68	1,995	2,650	3,439
69	1,995	2,649	3,437
70	1,994	2,648	3,435
71	1,994	2,647	3,433
72	1,993	2,646	3,431
73	1,993	2,645	3,429
74	1,993	2,644	3,427
75	1,992	2,643	3,425
76	1,992	2,642	3,423
77	1,991	2,641	3,422
78	1,991	2,640	3,420
79	1,990	2,639	3,418
80	1,990	2,639	3,416
90	1,987	2,632	3,402
100	1,984	2,626	3,390
110	1,982	2,621	3,381
120	1,980	2,617	3,373
130	1,978	2,614	3,367
140	1,977	2,611	3,361
150	1,976	2,609	3,357
200	1,972	2,601	3,340
250	1,969	2,596	3,330
300	1,968	2,592	3,323
350	1,967	2,590	3,319

**Критичні значення критерію Фішера
для рівня значущості $p=0,05$**

Число ступенів свободи меншої дисперсії, k_2	Число ступенів свободи більшої дисперсії, k_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88	245,95
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20

Критичні значення критерію Фішера
для рівня значущості $p=0,01$

Число ступенів свободи меншої дисперсії, k_2	Число ступенів свободи більшої дисперсії, k_1										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6066	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,33	99,30	99,34	99,36	99,36	99,40	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,72
n	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,71
11	9,85	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,45

Критичні значення критерію Вілкоксона
(надійність $P=0,95$, n – число парних спостережень)

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$W_{\text{зр}}$	1	3	5	7	9	12	15	18	22	26

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$W_{\text{зр}}$	31	36	41	49	53	60	67	74	82	90