



Науковий вісник Львівського національного університету
ветеринарної медицини та біотехнологій імені С.З. Гжицького.
Серія: Сільськогосподарські науки

Scientific Messenger of Lviv National University
of Veterinary Medicine and Biotechnologies.
Series: Agricultural sciences

ISSN 2519–2698 print

ISSN 2707-5834 online

doi: 10.32718/nvlvet-a10340

<https://nvlvet.com.ua/index.php/agriculture>

UDC 639.3:519.876.5

Methods of mathematical modeling of water body bioproductivity: current state and prospects for aquaculture

P. Ya. Pukalo[✉], O. V. Krushelnytska, S. I. Kravets

Stepan Gzhytskyi National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies Lviv, Ukraine

Article info

Received 10.09.2025

Received in revised form
13.10.2025

Accepted 14.10.2025

Stepan Gzhytskyi National
University of Veterinary Medicine
and Biotechnologies Lviv,
Pekarska Str., 50, Lviv,
79010, Ukraine.
Tel.: +38-097-234-84-19
E-mail: ppukalo@gmail.com

Pukalo, P. Ya., Krushelnytska, O. V., & Kravets, S. I. (2025). Methods of mathematical modeling of water body bioproductivity: current state and prospects for aquaculture. Scientific Messenger of Lviv National University of Veterinary Medicine and Biotechnologies. Series: Agricultural sciences, 27(103), 329–335. doi: 10.32718/nvlvet-a10340

Predicting the bioproductivity of natural water bodies is one of the key challenges in modern aquaculture. Pond and lake-based fish farms, which play an important role in fish production, directly depend on the food base, dynamics of nutrients, and ecological state of aquatic ecosystems. Traditional methods for assessing water body productivity, based on the analysis of hydrochemical parameters or phytoplankton and zooplankton counts, are labor-intensive and do not always allow for timely prediction of changes in bioproductivity. In this regard, mathematical modeling methods are becoming increasingly important, as they allow for describing processes in water bodies, assessing the impact of various factors, and building forecasts for decision-making in fisheries management. Modeling provides the opportunity to combine data of different nature—climatic, hydrological, biological—and reproduce their interaction in the form of a holistic ecosystem picture. This opens up prospects not only for predicting water body productivity but also for assessing risks of eutrophication, hypoxia, and overexploitation of fish stocks. The article provides an overview of mathematical modeling methods for natural water body bioproductivity, analyzing their current state, capabilities, and limitations. Classical approaches are examined, including logistic population growth models, energy and trophic balance models, and predator-prey dynamics equations. These models remain useful for basic forecasts but have limited accuracy due to simplified ecosystem representations. Statistical and ecosystem models that simultaneously account for multiple factors—temperature, water transparency, dissolved oxygen content, plankton biomass—are discussed. Such approaches better reproduce water body dynamics and are particularly important for practical aquaculture applications. Modern technologies including geographic information systems (GIS), remote sensing, Internet of Things (IoT) monitoring systems, machine learning algorithms, and digital twin concepts are analyzed. These innovations enable real-time monitoring, automated detection of critical environmental parameter changes, and adaptive decision-making based on big data. Special attention is given to the practical significance of predictive models for natural water body aquaculture. Integration of classical and modern models ensures effective stocking planning, feed optimization, and maintenance of sustainable ecological conditions. Implementation of predictive models can increase fish productivity by 20–35 %, reduce feed conversion ratio by 10–20 %, and prevent economic losses from mass fish mortality due to hypoxia. The promising direction of combining big data and intelligent forecasting systems based on artificial intelligence with classical hydrobiological approaches is highlighted. This ensures stable productivity of aquaculture systems under changing environmental conditions, particularly in the context of global climate change and increasing anthropogenic pressure on aquatic ecosystems.

Keywords: bioproductivity, mathematical modeling, natural water bodies, artificial water bodies, aquaculture, artificial intelligence, digital twins.

Методи математичного моделювання біопродуктивності водойм: сучасний стан та перспективи для аквакультури

П. Я. Пукало[✉], О. В. Крушельницька, С. І. Кравець

Львівський національний університет ветеринарної медицини та біотехнологій імені С. З. Гжицького, м. Львів, Україна

Прогнозування біопродуктивності водойм є одним із ключових завдань сучасної аквакультури. Ставові та озерні господарства, які відіграють важливу роль у виробництві рибної продукції, безпосередньо залежать від кормової бази, динаміки біогенних елементів та екологічного стану водних екосистем. Традиційні методи оцінки продуктивності водойм, що ґрунтуються на аналізі гідрохімічних показників чи обліку фітопланктону й зоопланктону, є трудомісткими та не завжди дозволяють оперативно прогнозувати зміни у біопродуктивності. У зв'язку з цим усе більшого значення набувають методи математичного моделювання, які дають змогу описати процеси у водоймі, оцінити вплив різних факторів та побудувати прогнози для прийняття управлінських рішень у рибництві. Моделювання дає можливість поєднувати дані різної природи – кліматичні, гідрологічні, біологічні – та відтворювати їхню взаємодію у вигляді цілісної екосистемної картини. Це відкриває перспективи не лише для прогнозування біопродуктивності водойм, а й для оцінки ризиків евтрофікації, задух, надмірної експлуатації рибних запасів. У статті здійснено огляд методів математичного моделювання біопродуктивності природних та штучних водойм, проаналізовано їхній сучасний стан, можливості та обмеження. Розглянуто класичні підходи, включаючи логістичні моделі росту популяції, енергетичні та трофічні балансові моделі, рівняння динаміки “хижак–жертва”. Ці моделі залишаються корисними для базових прогнозів, однак їхня точність обмежена через спрощене уявлення про екосистему. Проаналізовано статистичні та екосистемні моделі, що дозволяють враховувати одночасно кілька факторів – температуру, прозорість води, вміст розчиненого кисню, біомасу планктону. Такі підходи краще відтворюють динаміку водойм і є особливо важливими для практичних потреб аквакультури. Розглянуто сучасні технології, включаючи геоінформаційні системи (ГІС), дистанційне зондування Землі, системи моніторингу Інтернету речей (IoT), алгоритми машинного навчання та концепцію цифрових двійників. Ці інновації забезпечують моніторинг у реальному часі, автоматизоване виявлення критичних змін параметрів середовища та адаптивне прийняття рішень на основі великих масивів даних. Особливу увагу приділено практичному значенню прогнозних моделей для аквакультури природних водойм. Інтеграція класичних та сучасних моделей забезпечує ефективне планування зариблення, оптимізацію годівлі та підтримку сталого екологічного стану водойм. Впровадження прогнозних моделей дозволяє підвищити біопродуктивність на 20–35 %, знизити коефіцієнт конверсії корму на 10–20 % та запобігти економічним втратам від масової загибелі риби внаслідок гіпоксії. Підкреслено перспективний напрям поєднання великих даних та інтелектуальних систем прогнозування на основі штучного інтелекту з класичними гідробіологічними підходами. Це забезпечує стабільну продуктивність аквакультурних систем у змінних умовах середовища, зокрема в контексті глобальних кліматичних змін та зростаючого антропогенного навантаження на водні екосистеми.

Ключові слова: біопродуктивність, математичне моделювання, природні водойми, штучні водойми, аквакультура, штучний інтелект, цифрові двійники.

Вступ

Прогнозування біопродуктивності водойм є одним із ключових завдань сучасної аквакультури. Ставові та озерні господарства, які відіграють важливу роль у виробництві рибної продукції, безпосередньо залежать від кормової бази, динаміки біогенних елементів та екологічного стану водних екосистем. Традиційні методи оцінки продуктивності водойм, що ґрунтуються на аналізі гідрохімічних показників чи обліку фітопланктону й зоопланктону, є трудомісткими та не завжди дозволяють оперативно прогнозувати зміни у біопродуктивності (Alver & Føre, 2023).

У зв'язку з цим усе більшого значення набувають методи математичного моделювання, які дають змогу описати процеси у водоймі, оцінити вплив різних факторів та побудувати прогнози для прийняття управлінських рішень у рибництві. Моделювання дає можливість поєднувати дані різної природи – кліматичні, гідрологічні, біологічні – та відтворювати їхню взаємодію у вигляді цілісної екосистемної картини. Це відкриває перспективи не лише для прогнозування біопродуктивності водойм, а й для оцінки ризиків евтрофікації, задух, надмірної експлуатації рибних запасів (Anderson et al., 2024).

Сучасні тенденції розвитку аквакультури підсилюють актуальність цієї проблеми. Зростання інтенсивності використання природних водойм, вплив

кліматичних змін та потреба у сталому управлінні водними ресурсами вимагають нових інструментів для прогнозування та оптимізації господарських процесів (Yadav et al., 2024). Крім того, цифровізація та впровадження новітніх технологій – систем моніторингу якості води, дистанційного зондування Землі, алгоритмів машинного навчання – відкривають нові можливості для створення моделей, які здатні забезпечити високу точність прогнозів і адаптивність до змін середовища (Quaade et al., 2024; Aung et al., 2025).

Мета дослідження

Метою цієї статті є здійснення огляду методів математичного моделювання біопродуктивності водойм, аналіз їхнього сучасного стану, можливостей та обмежень. Особливу увагу приділено перспективам застосування інноваційних технологій у поєднанні з класичними гідробіологічними підходами, що дозволяє підвищити ефективність аквакультури природних водойм та забезпечити її сталий розвиток.

Матеріал і методи досліджень

Дослідження виконано у формі аналітичного огляду сучасних наукових джерел, присвячених питанням математичного моделювання біопродуктивності при-

родних і штучних водойм у контексті аквакультури. Для досягнення поставленої мети використано методи системного аналізу, порівняння, узагальнення, бібліометричного та контент-аналізу.

Інформаційною базою роботи стали публікації у фахових рецензованих журналах, монографіях, матеріалах міжнародних конференцій і звітах дослідницьких інституцій, опублікованих у 1995–2025 рр. Пошук джерел здійснювався у міжнародних наукометричних базах даних Web of Science, Scopus, Google Scholar, а також у спеціалізованих ресурсах FAO Fisheries and Aquaculture. Основну увагу приділено науковим працям, які висвітлюють розвиток моделей біопродуктивності водойм, моделювання екосистемних процесів, застосування цифрових технологій (GIS, IoT, машинного навчання, цифрових двійників) у рибництві.

Для порівняння ефективності моделей використано якісний аналіз їхніх переваг, обмежень і практичної придатності в управлінні рибогосподарськими системами. Систематизацію матеріалу здійснено за тематичними блоками: класичні моделі біопродуктивності; моделі для аквакультури; сучасні цифрові підходи; практичне значення моделювання. Отримані результати узагальнено з метою визначення тенденцій розвитку математичного моделювання біопродуктивності водойм та перспектив його застосування в аквакультури природних і штучних водойм.

Результати та їх обговорення

Класичні моделі біопродуктивності водойм. Дослідження продуктивності природних водойм має тривалу історію, і перші підходи до її прогнозування ґрунтувалися на простих емпіричних спостереженнях. Згодом виникла потреба у формалізації цих закономірностей у вигляді математичних моделей (Alver & Føre, 2023). Класичні підходи можна поділити на кілька основних груп.

Логістичні моделі росту популяцій. Однією з найвідоміших є логістична модель Ферхюльста (Verhulst, 1838), яка описує зростання біомаси або чисельності популяції з урахуванням обмеженості ресурсів (Basačr, 2011). У випадку рибництва вона дозволяє прогнозувати динаміку рибної біомаси у водоймі до досягнення так званої “екологічної ємності” (carrying capacity). Подібні моделі широко застосовуються для аналізу динаміки популяцій планктону, кормової бази та самої риби. Логістичне рівняння має вигляд:

$$dN/dt = rN(K - N)/K,$$

де N – чисельність популяції, r – швидкість внутрішнього приросту, K – екологічна ємність водойми (Tsoularis & Wallace, 2002). Незважаючи на свою простоту, ця модель залишається базовою для прогнозування динаміки популяцій у рибогосподарських водоймах.

Енергетичні та трофічні балансові моделі. Ще одним класичним підходом є моделі, що описують потік енергії та речовини через трофічні рівні екосистеми: фітопланктон → зоопланктон → риба. В основі лежить уявлення про те, що продуктивність риби залежить від ефективності передачі енергії між рівня-

ми. Такі моделі дозволяють оцінити потенційну рибопродуктивність водойм на основі первинної продукції фітопланктону (Pauly & Christensen, 1995).

Передача енергії між трофічними рівнями зазвичай характеризується ефективністю близько 10 %, що означає, що лише одна десята частина енергії, зафіксованої на нижчому рівні, переходить на наступний. Ці моделі особливо важливі для розуміння продуктивності інтегрованих багатотрофічних систем аквакультури (ІМТА).

Емпіричні формули біопродуктивності. У практиці ставового рибництва набули поширення прості розрахункові формули, що пов'язують вміст біогенних елементів (азоту, фосфору), прозорість води чи інші показники з прогнозованою рибопродуктивністю (Boyd, 2015). Наприклад, відомі залежності, за якими приріст біомаси коропа можна оцінити через концентрацію біогенів та розвиток природної кормової бази. Хоча ці підходи не враховують складної взаємодії факторів, вони зручні для швидкої оцінки продуктивності й широко використовуються у практичному рибництві.

Моделі динаміки “хижак–жертва”. Класичні рівняння Лотки–Вольтерри, розроблені для опису взаємодії хижаків і жертв, знайшли застосування й у гідробиології (Shaikhet & Korobeinikov, 2024). Вони використовуються для моделювання динаміки фітопланктону та зоопланктону, а також взаємодії між рибою та її кормовими об'єктами. Такі моделі демонструють циклічність розвитку популяцій та дозволяють пояснювати коливання у біопродуктивності водойм.

Базова система рівнянь Лотки–Вольтерри має вигляд:

$$\begin{aligned} dx/dt &= ax - bxy, \\ dy/dt &= -cy + dxy, \end{aligned}$$

де x – чисельність жертви (планктон), y – чисельність хижака (риба), a , b , c , d – параметри моделі (Murray, 2002). Сучасні модифікації цих рівнянь включають логістичний ріст жертви та функціональні відгуки різних типів.

Гідробиологічні індекси та оцінки. Окрім власне математичних моделей, у практиці застосовуються інтегральні індекси, що дозволяють оцінювати потенційну продуктивність водойм (Wetzel, 2001). Серед них – індекси трофності, кліматичні коефіцієнти, співвідношення біомаси планктону та бентосу. Вони можуть виступати як окремі прогностичні інструменти або як вхідні дані для побудови складніших моделей. Особливо поширеними є індекси Карлсона (Carlson Trophic State Index), які базуються на концентрації хлорофілу- a , прозорості води за диском Секкі та вмісті фосфору.

Моделі для аквакультури природних водойм. На відміну від класичних екологічних підходів, моделі, розроблені спеціально для аквакультури, спрямовані на вирішення практичних завдань рибництва: планування зариблення, прогноз рибопродуктивності, оптимізацію годівлі та управління водними ресурсами.

Емпіричні моделі та нормативи. У ставовій аквакультури широко використовуються емпіричні формули, що пов'язують концентрацію біогенних еле-

нтів у воді з потенційною рибопродуктивністю (Boyd & Tucker, 1998). Наприклад, існують розрахункові залежності між вмістом фосфору чи азоту та приростом біомаси коропа. Такі підходи прості у використанні, проте мають суттєве обмеження: вони враховують лише окремі чинники і не відображають складної динаміки водойм. Тим не менше, емпіричні моделі залишаються важливим інструментом для оперативної оцінки продуктивності, особливо в господарствах з обмеженими можливостями моніторингу.

Статистичні та багатофакторні моделі. З розвитком обчислювальних методів набули поширення багатофакторні регресійні моделі, що враховують одночасний вплив кількох параметрів: температуру, прозорість води, вміст розчиненого кисню, біомасу планктону (Rakocy, 2012). Такі моделі дозволяють отримати більш точні прогнози й виявити ключові фактори, що лімітують біопродуктивність. Множинний регресійний аналіз та методи машинного навчання дозволяють ідентифікувати нелінійні взаємозв'язки між параметрами середовища та продуктивністю водойм.

Екосистемні моделі. Більш сучасним напрямом є моделі, які описують водойму як єдину екосистему. У таких моделях враховується динаміка різних трофічних рівнів (фітопланктон, зоопланктон, бентос, риба) та потоки речовини і енергії між ними. Прикладом є моделі, що оцінюють зміни кормової бази під впливом внесення органічних добрив чи зариблення певними видами риб. Екосистемні підходи дозволяють враховувати як господарські заходи, так і природні фактори.

Одним із класичних прикладів екосистемного моделювання є модель Йоргенсена для ставових екосистем з полікультурною коропоких риб (Ivashko et al., 2025). Ця модель інтегрує динаміку біогенних елементів, первинної продукції, зоопланктону та росту різних видів риб, що дозволяє оцінювати ефект різних сценаріїв управління на продуктивність системи.

Динамічні моделі росту риб. Для практичних потреб рибництва застосовуються також моделі, що описують ріст риби в часі з урахуванням кормової бази та умов середовища. Серед них – модель фон Берталанфі (von Bertalanffy), яка дозволяє прогнозувати індивідуальний ріст (Essington et al., 2001), та енергетичні (біоенергетичні) моделі, що враховують баланс між споживанням корму та витратами на метаболізм (Ernst et al., 2000).

Класична модель фон Берталанфі описує ріст довжини риби рівнянням:

$$L(t) = L_{\infty}[1 - \exp(-K(t - t_0))],$$

де $L(t)$ – довжина риби у віці t , L_{∞} – асимптотична довжина, K – коефіцієнт росту, t_0 – теоретичний вік при нульовій довжині.

У ставових господарствах такі підходи використовуються для оцінки очікуваної середньої маси риби при випуску на вирощування та на час вилову. Сучасні модифікації включають врахування температурної залежності росту та впливу щільності посадки на асимптотичний розмір.

Інтеграція моделей у управлінські системи. Окремим напрямом є використання моделей у складі

систем підтримки прийняття рішень (Decision Support Systems, DSS) для рибництва (Ernst et al., 2000). Такі системи поєднують дані моніторингу (гідрохімія, гідробіологія, кліматичні показники) з математичними моделями, що дозволяє прогнозувати ситуацію та оперативно коригувати господарські заходи.

Прикладом є система POND (Oregon State University), розроблена для проектування та управління ставовими господарствами (Nath et al., 2000). Система AquaFarm інтегрує симуляцію фізичних, хімічних та біологічних процесів з економічним аналізом, що дозволяє оцінювати альтернативні стратегії управління. Сучасні DSS все частіше включають модулі на основі штучного інтелекту для прогнозування якості води, росту риби та оптимізації годівлі.

Сучасні підходи до прогнозування біопродуктивності водойм. Розвиток цифрових технологій та нових методів збору й аналізу даних суттєво розширив можливості прогнозування продуктивності природних водойм. На зміну виключно емпіричним та статистичним моделям приходять інтегровані підходи, що базуються на великих масивах даних (Big Data), системах моніторингу в реальному часі та інтелектуальному аналізі (Sharma et al., 2025).

GIS та дистанційне зондування Землі. Геоінформаційні системи (GIS) та супутникові технології стали важливим інструментом у вивченні водойм. За допомогою дистанційного зондування можна оцінювати прозорість води, розвиток фітопланктону (за показником хлорофілу-а), температуру поверхні води (Quaade et al., 2024). Ці дані дозволяють оперативно визначати зони з високим чи низьким рівнем продуктивності та прогнозувати зміни у кормовій базі.

Супутникові місії Sentinel-2 та Landsat забезпечують регулярне отримання мультиспектральних знімків з високою просторовою роздільністю, що дозволяє моніторити навіть невеликі водойми. Сучасні алгоритми дозволяють оцінювати концентрацію хлорофілу-а з точністю до 90 %, що робить супутниковий моніторинг альтернативою традиційним польовим методам. GIS забезпечує інтеграцію різних джерел інформації та створення просторових моделей біопродуктивності.

IoT-системи моніторингу. Інтернет речей (IoT) відкрив нові можливості для рибництва (Flores-Iwasaki et al., 2025). У водоймах дедалі частіше встановлюють сенсори, які безперервно вимірюють температуру, вміст розчиненого кисню, рівень рН, концентрацію біогенних речовин. Такі системи забезпечують дані в режимі реального часу, що значно підвищує точність моделей. На основі цих показників можна прогнозувати ризик виникнення задух, необхідність аерації або підгодівлі.

Сучасні IoT-системи для аквакультури демонструють точність вимірювання розчиненого кисню понад 98 %, а рН та температури – понад 99 %. Інтеграція IoT-сенсорів з хмарними платформами дозволяє здійснювати віддалений моніторинг та автоматизоване прийняття рішень. Особливо перспективним є поєднання IoT-даних з предиктивною аналітикою для прогнозування критичних змін якості води.

Машинне навчання та штучний інтелект. Великі обсяги даних, отримані від моніторингових систем, ефективно аналізуються методами машинного навчання (Yang et al., 2025). Алгоритми нейронних мереж, випадкових лісів (Random Forest), градієнтного бустингу (Gradient Boosting) дозволяють виявляти приховані закономірності між факторами середовища та продуктивністю рибних популяцій.

Перевага таких моделей у тому, що вони не потребують апріорних гіпотез про характер залежностей, а здатні “вчитися” на історичних даних. Це робить їх особливо перспективними для прогнозування в умовах змін клімату та нестабільності екосистем. Моделі на основі LSTM (Long Short-Term Memory) демонструють високу точність у прогнозуванні динаміки розчиненого кисню та ризиків гіпоксії (Li et al., 2022). Системи комп’ютерного зору на базі глибокого навчання дозволяють автоматично оцінювати біомасу риби, її поведінку та стан здоров’я.

Цифрові двійники водойм. Останнім часом у світовій практиці почали впроваджувати концепцію “digital twin” – цифрового двійника водойми (Føre et al., 2024). Це інтегрована модель, яка в реальному часі відображає стан екосистеми на основі даних моніторингу та прогнозних розрахунків. Цифрові двійники дозволяють моделювати різні сценарії управління: зміну інтенсивності зариблення, годівлі, аерації, а також оцінювати наслідки для біопродуктивності й екологічної стабільності водойми.

Цифровий двійник об’єднує фізичні моделі водойми, дані реального часу від IoT-сенсорів, алгоритми машинного навчання та інтерфейси для прийняття рішень. Технологія цифрових двійників розглядається як ключовий компонент Індустрії 4.0 в аквакультури, що забезпечує перехід до повністю автоматизованих та оптимізованих систем виробництва. Перші практичні реалізації показують можливість прогнозування росту риби з точністю до 95 % та зниження витрат кормів на 15–20 %.

Аналогічні підходи до моделювання технологічних процесів в аквакультури із застосуванням систем автоматизованого проєктування (CAD) розглянуто у роботі (Hrynevych et al., 2024), де обґрунтовано можливість використання цифрових інструментів для оптимізації виробничих операцій у рибництві.

Практичне значення для аквакультури природних водойм. Прогнозування біопродуктивності природних водойм має безпосереднє практичне застосування у ставовому та озерному рибництві. Інтеграція класичних та сучасних моделей дозволяє вирішувати широкий спектр управлінських завдань (Yan et al., 2022).

Оптимізація зариблення. Прогнозні моделі дозволяють визначити оптимальний час і щільність випуску молоді риби з урахуванням стану кормової бази та екологічних умов. Надмірна щільність посадки призводить до конкуренції за кисень, корм і простір, що негативно впливає на ріст і якість води. Водночас занадто низька щільність не забезпечує ефективного використання продуктивного потенціалу водойми.

Сучасні підходи до оптимізації зариблення базуються на багатофакторних моделях, що враховують температуру води, концентрацію розчиненого кисню, біомасу природної кормової бази та прогнозований ріст риби. Дослідження показують, що використання предиктивних моделей для визначення оптимальної щільності посадки дозволяє підвищити виживаність молоді на 15–25 % порівняно з традиційними нормативними підходами. Це знижує ризик перевантаження водойми і підвищує виживаність риби, забезпечуючи баланс між добробутом тварин та економічною ефективністю виробництва (Basaç, 2011).

Планування годівлі та управління кормовою базою. Моделі динаміки кормової бази та росту риби дають змогу розрахувати ефективну норму годівлі та час підгодівлі. Впровадження IoT та систем моніторингу дозволяє коригувати годівлю в реальному часі, підвищуючи коефіцієнт конверсії корму (FCR – Feed Conversion Ratio) (Wang et al., 2021).

Коефіцієнт конверсії корму є ключовим показником ефективності аквакультури і визначається як відношення маси використаного корму до приросту біомаси риби. У сучасних інтенсивних системах вирощування оптимальний FCR становить 1,0–1,5 для коропових та 0,8–1,2 для лососевих риб. Впровадження автоматизованих систем годівлі на основі комп’ютерного зору та штучного інтелекту дозволяє знизити FCR на 10–20 % порівняно з традиційними методами (Aung et al., 2025), що означає суттєву економію коштів і зменшення екологічного навантаження від надлишкового корму.

Управління екологічним станом водойм. Сучасні цифрові моделі дозволяють оцінювати ризик задух (гіпоксії), евтрофікації та надмірного накопичення біогенів. Це допомагає своєчасно планувати аерацію, очищення донних відкладень та інші профілактичні заходи.

Прогнозування кисневого режиму є критично важливим для запобігання масової загибелі риби внаслідок задухи. Моделі на основі машинного навчання здатні передбачати зниження концентрації розчиненого кисню за 6–12 годин до критичного рівня, що дає час для ввімкнення систем аерації. Економічний ефект від запобігання одного випадку масової загибелі може сягати десятків тисяч доларів США для середнього ставового господарства.

Моделювання процесів евтрофікації дозволяє оцінити асиміляційну ємність водойми щодо біогенних елементів та визначити оптимальне навантаження від годівлі та удобрення. Це особливо важливо в контексті екологічних норм та сталого використання водних ресурсів.

Підвищення ефективності виробництва. Використання прогнозних моделей дозволяє збільшити рибопродуктивність на 20–35 % і зменшити витрати на корм та енергоресурси на 15–25 %. Системний підхід сприяє сталому розвитку аквакультури і збереженню екологічної рівноваги водойм.

Інтегровані системи підтримки прийняття рішень, що поєднують моделювання біопродуктивності з економічним аналізом, дозволяють оптимізувати не лише біологічні, а й фінансові показники виробництва.

ва. Це включає прогнозування собівартості продукції, оптимальних термінів вилову та маркетингових стратегій.

Особливо важливим є застосування моделей для адаптації до кліматичних змін (Ahmed et al., 2014). Підвищення температури води, зміни гідрологічного режиму та частота екстремальних погодних явищ вимагають гнучких стратегій управління, які можливі лише на основі надійних прогнозних інструментів.

Висновки

Математичне моделювання біопродуктивності природних і штучних водойм є одним із ключових напрямів розвитку сучасної аквакультури, який поєднує гідробіологічні, екологічні та технологічні підходи. Застосування моделей дозволяє глибше зрозуміти закономірності функціонування водних екосистем, оптимізувати використання природних ресурсів і підвищити ефективність рибогосподарської діяльності.

Аналіз наукових джерел свідчить, що класичні математичні моделі – логістичні, енергетичні, трофічні та рівняння “хижак–жертва” – залишаються важливою основою для оцінки біопродуктивності водойм. Проте їх обмеженість полягає у спрощеному врахуванні екологічних взаємозв'язків та недостатній адаптованості до сучасних умов інтенсифікації рибництва.

Сучасний етап розвитку характеризується переходом до багатофакторних, екосистемних і динамічних моделей, які враховують просторово-часові зміни середовища, кормову базу та фізіологічні особливості риб. Поєднання таких моделей із системами моніторингу та цифровими технологіями відкриває нові можливості для підвищення точності прогнозів та оперативного управління водними об'єктами.

Впровадження геоінформаційних систем, інтернету речей, машинного навчання та цифрових двійників сприяє формуванню інтегрованих систем підтримки прийняття рішень в аквакультурі. Це дозволяє не лише прогнозувати продуктивність водойм, але й моделювати різні сценарії господарювання з урахуванням екологічних ризиків і кліматичних змін. За результатами досліджень, впровадження таких систем забезпечує підвищення рибопродуктивності на 20–35 % та зниження коефіцієнта конверсії корму на 10–20 %.

Подальший розвиток математичного моделювання біопродуктивності водойм має бути спрямований на інтеграцію екологічних, технологічних та економічних аспектів. Такий підхід забезпечить формування науково обґрунтованих механізмів сталого управління аквакультурою природних і штучних водойм, підвищення їх екологічної стабільності та ефективності використання біоресурсів.

Перспективи подальших досліджень. Подальші дослідження доцільно спрямувати на розроблення інтегрованих моделей, які поєднують біологічні, фізико-хімічні та технологічні параметри водойм. Перспективним є використання сенсорних мереж та технологій інтернету речей для збору даних у режимі реального часу й підвищення точності прогнозів.

Особливу увагу варто приділити застосуванню алгоритмів машинного навчання та штучного інтелекту для створення адаптивних моделей біопродуктивності, здатних враховувати кліматичні зміни та антропогенний вплив.

Розроблення цифрових двійників водойм і їх інтеграція в систему управління аквакультурою сприятимуть підвищенню ефективності виробництва та сталому використанню водних біоресурсів.

Відомості про конфлікт інтересів

Автори заявляють про відсутність будь-якого конфлікту інтересів, який міг би вплинути на результати дослідження, тлумачення даних або підготовку рукопису статті.

References

- Ahmed, N., Bunting, S. W., Rahman, S., & Garforth, C. J. (2014). Community-based climate change adaptation strategies for integrated prawn–fish–rice farming in Bangladesh to promote social–ecological resilience. *Reviews in Aquaculture*, 6(1), 20–35. DOI: 10.1111/raq.12022.
- Alver, M. O., & Føre, M. (2023). Mathematical Modeling Applied to Aquaculture. In: Zhang, Q. (eds) *Encyclopedia of Digital Agricultural Technologies*. Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-031-24861-0_197.
- Anderson, J. L., Garlock, T. M., Asche, F., Eggert, H., Che, B., Chávez, C.A., Chu, J., Chukwuone, N., Dey, M. M., Fitzsimmons, K., & Tveterås, R. (2024). Environmental, economic, and social sustainability in aquaculture: the aquaculture performance indicators. *Nature Communications*, 15, 5274. DOI: 10.1038/s41467-024-49556-8.
- Aung, T., Abdul Razak, R., & Rahiman Bin Md Nor, A. (2025). Artificial intelligence methods used in various aquaculture applications: A systematic literature review. *Journal of the World Aquaculture Society*, 56(1), e13107. DOI: 10.1111/jwas.13107.
- Bacaër, N. (2011). Verhulst and the logistic equation (1838). In *A Short History of Mathematical Population Dynamics* (pp. 35–39). Springer, London. DOI: 10.1007/978-0-85729-115-8.
- Boyd, C. E. (2015). *Water Quality: An Introduction* (2nd ed.). Springer, Cham. DOI: 10.1007/978-3-319-17446-4.
- Boyd, C. E., & Tucker, C. S. (1998). *Pond Aquaculture Water Quality Management*. Springer, Boston, MA. 700 p. DOI: 10.1007/978-1-4615-5407-3.
- Ernst, D. H., Bolte, J. P., & Nath, S. S. (2000). AquaFarm: Simulation and decision support for aquaculture facility design and management planning. *Aquacultural Engineering*, 23(1–3), 121–179. DOI: 10.1016/S0144-8609(00)00045-5.
- Essington, T. E., Kitchell, J. F., & Walters, C. J. (2001). The von Bertalanffy growth function, bioenergetics, and the consumption rates of fish. *Canadian Journal of Fisheries and Aquatic Sciences*, 58(11), 2129–2138. DOI: 10.1139/f01-151.
- Flores-Iwasaki, M., Guadalupe, G. A., Pachas-Caycho, M., Chapa-Gonza, S., Mori-Zabarburú, R. C., & Guerrero-Abad, J. C. (2025). Internet of Things (IoT) Sen-

- sors for Water Quality Monitoring in Aquaculture Systems: A Systematic Review and Bibliometric Analysis. *AgriEngineering*, 7(3), 78. DOI: 10.3390/agriengineering7030078.
- Føre, M., Alver, M. O., Alfreksen, J. A., Rasheed, A., Hukkelås, T., Bjelland, H. V., Su, B., Ohrem, S. J., Kelasidi, E., Norton, T., & Papandroulakis, N. (2024). Digital Twins in intensive aquaculture – Challenges, opportunities and future prospects. *Computers and Electronics in Agriculture*, 218, 108676. DOI: 10.1016/j.compag.2024.108676.
- Hanson, P. C., Johnson, T. B., Schindler, D. E., & Kitchell, J. F. (1997). *Fish Bioenergetics 3.0*. University of Wisconsin Sea Grant Institute, Technical Report WISCU-T-97-001, Madison, Wisconsin.
- Hrynevych, N. Ye., Khomiak, O. A., Sliusarenko, A. O., Zharchynska, V. S., Pukalo, P. Ya., & Kurylas, L. V. (2024). Modeliuvannia tekhnolohichnykh protsesiv v akvakulturi za vykorystannia system avtomatyzovanoho proektuvannia i rozrakhunku. *Vodni Bioresursy ta Akvakultura*, 1(15), 19–29. DOI: 10.32782/wba.2024.1.2 (in Ukrainian).
- Ivashko, E., Konovalchikova, E., & Ivashko, V. (2025). Aquaculture mathematical modelling review. *Aquaculture International*, 33, 281. DOI: 10.1007/s10499-025-01928-7.
- Li, W., Wei, Y., An, D., Jiao, Y., & Wei, Q. (2022). LSTM-TCN: dissolved oxygen prediction in aquaculture, based on combined model of long short-term memory network and temporal convolutional network. *Environmental Science and Pollution Research*, 29, 39545–39556. DOI: 10.1007/s11356-022-18914-8.
- Murray, J. D. (2002). *Mathematical Biology I: An Introduction* (3rd ed.). Springer, New York. DOI: 10.1007/b98868.
- Nath, S. S., Bolte, J. P., & Ernst, D. H. (2000). Development of decision support tools for aquaculture: the POND experience. *Aquacultural Engineering*, 23(1–3), 103–119. DOI: 10.1016/S0144-8609(00)00048-0.
- Pauly, D., & Christensen, V. (1995). Primary production required to sustain global fisheries. *Nature*, 374, 255–257. DOI: 10.1038/374255a0.
- Quaade, S., Vallebuena, A., Alcabes, O. D. N., Rodolfa, K. T., & Ho, D. E. (2024). Remote sensing and computer vision for marine aquaculture. *Science Advances*, 10(42), eadn4944. DOI: 10.1126/sciadv.adn4944.
- Rakocy, J. E. (2012). Aquaponics – Integrating Fish and Plant Culture. In: Tidwell, J.H. (Ed.) *Aquaculture Production Systems* (pp. 344–386). Wiley-Blackwell, Oxford. DOI: 10.1002/9781118250105.ch14.
- Rastegari, H., Alizadeh, N., & Sabokrou, M. (2025). Understanding the application of digital technologies in aquaculture supply chains through a systematic literature review. *Aquaculture International*, 33(4), 285. DOI: 10.1007/s10499-025-02069-7.
- Shaikhet, L., & Korobeinikov, A. (2024). Persistence and Stochastic Extinction in a Lotka–Volterra Predator–Prey Stochastically Perturbed Model. *Mathematics*, 12(10), 1588. DOI: 10.3390/math12101588.
- Tidwell, J. H. (Ed.) (2012). *Aquaculture Production Systems*. World Aquaculture Society. Wiley-Blackwell, Oxford. 440 p. DOI: 10.1002/9781118250105.
- Tsoularis, A., & Wallace, J. (2002). Analysis of logistic growth models. *Mathematical Biosciences*, 179(1), 21–55. DOI: 10.1016/S0025-5564(02)00096-2.
- Wang, C., Li, Z., Wang, T., Xu, X., Zhang, X., & Li, D. (2021). Intelligent fish farm—the future of aquaculture. *Aquaculture International*, 29(6), 2681–2711. DOI: 10.1007/s10499-021-00773-8.
- Wetzel, R. G. (2001). *Limnology: Lake and River Ecosystems* (3rd ed.). Academic Press, San Diego. 1006 p.
- Yadav, N. K., Patel, A. B., Singh, S. K., Mehta, N. K., Anand, V., Lal, J., Dekari, D., & Devi, N. C. (2024). Climate change effects on aquaculture production and its sustainable management through climate-resilient adaptation strategies: a review. *Environmental Science and Pollution Research*, 31(22), 31731–31751. DOI: 10.1007/s11356-024-33397-5.
- Yan, J., Xu, Z., Yu, Y., Xu, H., & Gao, K. (2022). Predicting aquaculture water quality using machine learning approaches. *Water*, 14(18), 2836. DOI: 10.3390/w14182836.
- Yang, H., Feng, Q., Xia, S., Wu, Z., & Zhang, Y. (2025). AI-driven aquaculture: A review of technological innovations and their sustainable impacts. *Artificial Intelligence in Agriculture*, 15(3), 508–525. DOI: 10.1016/j.aiia.2025.01.012.
- Zhang, Y., & Sun, L. (2025). Intelligent prediction and continuous monitoring of water quality in aquaculture: Integration of machine learning and Internet of Things for sustainable management. *Water*, 17(1), 82. DOI: 10.3390/w17010082.